Association
mathématique
du Québec

Concours de l'Association mathématique du Québec

Ordre collégial

Le mercredi 21 février 2018

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note *: L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. Un compteur étourdi

Un compteur démarrant à 0 est utilisé pour afficher le nombre de personnes ayant franchi l'unique tourniquet à l'entrée d'un festival. Malheureusement, il est défectueux et saute toujours les chiffres 2, 5 et 7, passant directement au chiffre suivant, et ce peu importe la position du chiffre dans le nombre. Si, à la fin du festival, il indique 3608, combien de personnes ont réellement franchi le tourniquet pendant ce festival ?

2. Limitons l'a

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{ax + x - 1 - a^2}{5a - 3x}$. Trouver toutes les valeurs de a telles que

$$f(a) = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

3. Récursion en chaîne

Soit la fonction suivante définie pour les naturels non-nuls.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + f(n+1) & \text{si } n > 1 \text{ et } n \text{ est impair} \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

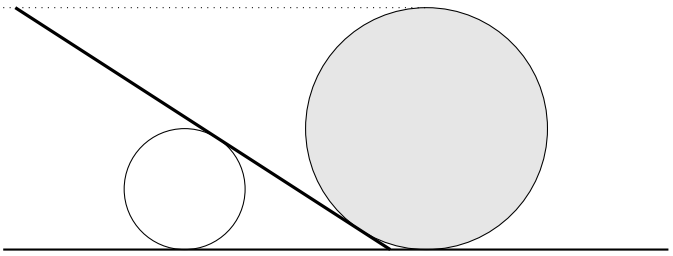
Calculer $f(2018)$.

4. Ruban sur la parabole

Soit une parabole de sommet $R\left(-\frac{1}{3}, -\frac{146}{9}\right)$ passant par les points $U(-3,-2)$, $B(3,y)$, A et N. Le segment $\overline{AN}$, de longueur 15, est parallèle au segment $\overline{UB}$. Sachant que l'ordonnée de A est inférieure à l'ordonnée de N, trouver les coordonnées du point A.

5. Donnez-moi un point d'appui...

Pour déplacer une roche massive de forme sphérique de 4 décimètres de rayon, on utilise un billot de bois cylindrique de 4 décimètres de diamètre et une perche pour produire un effet de levier. En insérant la perche jusqu'à ce qu'elle touche au sol on réalise que son autre extrémité arrive à la même hauteur que la roche (vue en coupe sur le schéma ci-dessous). Si les points de tangence de la roche et du billot avec le sol sont espacés de 9 décimètres, quelle est la longueur de la perche ? On considère négligeable l'épaisseur de la perche.



6. Vainquons l'inégalité !

Soit x, y et z trois nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}} > \pi.$$