Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial

Le mercredi 22 février 2017

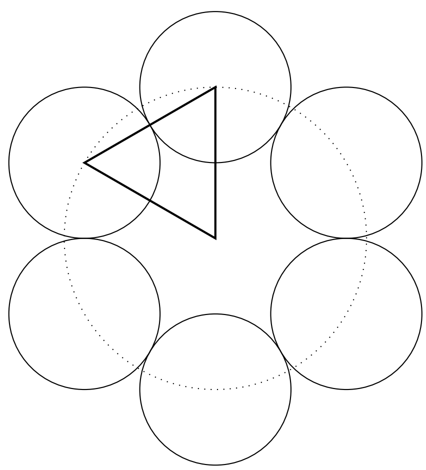
SOLUTIONNAIRE

---

1. Un rêve olympique

Simon a fait un rêve étrange : le conseil planétaire avait décidé de séparer l'Amérique du Nord et l'Amérique du Sud en deux continents distincts. Le Comité International Olympique en avait alors profité pour remodeler le logo olympique où les cinq anneaux colorés furent remplacés par six disques colorés. Ils optèrent pour une figure où les six disques de même taille ont leur centre sur un même cercle et où chaque disque est tangent avec ses deux voisins. À son réveil, Simon voulut reproduire ce logo en format géant en peignant chaque disque de couleur différente. Si le cercle qui passe par le centre des six disques a un rayon de 1 mètre, trouver quelle sera la surface totale des disques à peindre.

Solution :



Si à partir du centre du cercle on rejoint les centres de deux disques consécutifs on a que ces rayons du cercle forment entre eux un angle de $360°/6 = 60°$. Comme les rayons des deux disques sont tous deux perpendiculaires au point de tangence ils ont la même direction et forment donc un segment continu qui, avec les rayons du cercle, complète un triangle isocèle. De plus, ce triangle est équilatéral puisque l'angle au sommet est de 60°. Le rayon d'un disque est ainsi la moitié de celui du cercle, soit ½. L'aire d'un disque est donc de $\frac{\pi}{4}$ ce qui donne pour les 6 disques $\frac{3\pi}{2}$ m^2.

2. Tour de cubes

Paula a 4 cubes colorés de différentes dimensions. Le cube jaune a un volume de 21 000 cm^3, le cube bleu a un volume de 22 000 cm^3, le cube vert a un volume de 4 536 cm^3 et le cube rouge a un volume de 1 408 cm^3. Elle construit une petite tour en empilant le cube rouge par-dessus le cube vert sur une table où sont aussi déposés les deux autres cubes. Démontrer que sa tour est plus haute que le cube jaune, mais moins haute que le cube bleu.

Solution :

La hauteur d'un cube correspondant à son arête, on doit donc montrer que :

$$\sqrt[3]{21000} < \sqrt[3]{4536} + \sqrt[3]{1408} < \sqrt[3]{22000}.$$

Factorisons les radicandes :

$$\sqrt[3]{21000} = \sqrt[3]{1000 \cdot 21} = 10\sqrt[3]{21}$$
$$\sqrt[3]{4536} = \sqrt[3]{216 \cdot 21} = 6\sqrt[3]{21}$$
$$\sqrt[3]{1408} = \sqrt[3]{64 \cdot 22} = 4\sqrt[3]{22}$$
$$\sqrt[3]{22000} = \sqrt[3]{1000 \cdot 22} = 10\sqrt[3]{22}.$$

On a donc les relations suivantes :

$$\sqrt[3]{21000} = 10\sqrt[3]{21} = 6\sqrt[3]{21} + 4\sqrt[3]{21} < 6\sqrt[3]{21} + 4\sqrt[3]{22} = \sqrt[3]{4536} + \sqrt[3]{1408}$$
$$\sqrt[3]{22000} = 10\sqrt[3]{22} = 6\sqrt[3]{22} + 4\sqrt[3]{22} > 6\sqrt[3]{21} + 4\sqrt[3]{22} = \sqrt[3]{4536} + \sqrt[3]{1408}.$$

Ce qui démontre le résultat attendu.

3. Les tangentes sécantes

Identifier chaque point sur la courbe de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 35x + 34$ où la tangente à la courbe en ce point passe également par le point $(2, 5)$.

Solution :

Calculons la pente de la tangente cherchée de deux façons différentes.

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 35x + 34 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 35$$

La pente de la tangente au point $(a, f(a))$ est donc $m = f'(a) = 4a^3 + 12a^2 + 35$.

La pente de la droite passant par le point $(a, f(a))$ et le point $(2, 5)$ est donnée par

$$m = \frac{f(a)-5}{a-2} = \frac{(a^4+4a^3+35a+34)-5}{a-2}$$

Comme ces pentes doivent être égales, on obtient l'équation :

$$4a^3 + 12a^2 + 35 = \frac{a^4+4a^3+35a+29}{a-2} \Rightarrow (4a^3 + 12a^2 + 35)(a-2) = a^4 + 4a^3 + 35a + 29$$
$$4a^4 + 12a^3 + 35a - 8a^3 - 24a^2 - 70 = a^4 + 4a^3 + 35a + 29 \Rightarrow 3a^4 - 24a^2 - 99 = 0$$

Dans cette équation bicarrée on pose $b = a^2$ pour obtenir la quadratique

$3(b^2 - 8b - 33) = 0$ qui se factorise en $3(b+3)(b-11) = 0$, soit $3(a^2+3)(a^2-11) = 0$.

Le premier facteur variable ne peut s'annuler mais le second nous donne les deux solutions $a = \pm\sqrt{11}$.

En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la courbe, on trouve les deux points correspondant à la solution cherchée.

$$\begin{aligned} f\left(\pm\sqrt{11}\right) &= \left(\pm\sqrt{11}\right)^4 + 4\left(\pm\sqrt{11}\right)^3 + 35\left(\pm\sqrt{11}\right) + 34 = 121 \pm 44\sqrt{11} \pm 35\sqrt{11} + 34 \\ &= 155 \pm 79\sqrt{11}. \end{aligned}$$

Les points sont donc $\left(\sqrt{11}, 155+79\sqrt{11}\right)$ et $\left(-\sqrt{11}, 155-79\sqrt{11}\right)$.

4. L'ogre

Sachant que $\log_{16}(\log_4(\log_2(x))) = 504$, trouver la valeur de $\log_2(2+\log_2(\log_{16}(x)))$.

Solution :

Dans le but de simplifier l'écriture, notons $y = \log_2(x)$, $z = \log_4(y)$ et $504 = \log_{16}(z)$. Donc

$$\begin{aligned} \log_2(2+\log_2(\log_{16}(x))) &= \log_2\left(2+\log_2\left(\frac{\log_2(x)}{\log_2(16)}\right)\right) \\ &= \log_2\left(2+\log_2\left(\frac{y}{4}\right)\right) \\ &= \log_2\left(2+\log_2(y)-\log_2(4)\right) \\ &= \log_2\left(2+\frac{\log_4(y)}{\log_4(2)}-2\right) \\ &= \log_2\left(\frac{z}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \log_2(z)-\log_2\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\log_{16}(z)}{\log_{16}(2)}-(-1) \\ &= \frac{504}{\frac{1}{4}}+1 \\ &= 2016+1 \\ &= 2017 \end{aligned}$$

5. Les premiers ne seront plus premiers

Laura a été mandatée pour composer une question pour un concours de mathématiques d'une durée de 2 heures ayant lieu le 22/2/2017. Avec ces chiffres, elle construit le polynôme $2p^3+2p^2+22p+2017$, où p représente un nombre premier. Elle réalise ensuite qu'il est impossible qu'en évaluant ce polynôme on obtienne aussi un nombre premier. Prouver cette assertion.

Solution :

Soit $q(p) = 2p^3+2p^2+22p+2017$.

Considérons les restes de la division de p par 3.

Si le reste est nul, p est un multiple de 3 et le seul nombre premier qui soit un multiple de 3 est 3. Calculons $q(3)$.

$q(3) = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 22 \cdot 3 + 2017 = 54 + 18 + 66 + 2017 = 2155$

qui n'est pas un nombre premier, car c'est un multiple de 5.

Sinon, le reste de la division de p par 3 est 1 ou 2 et p a alors la forme $3n+1$ ou $3n+2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Calculons $q(3n+1)$.

$$\begin{aligned} q(3n+1) &= 2 \cdot (3n+1)^3 + 2 \cdot (3n+1)^2 + 22 \cdot (3n+1) + 2017 \\ &= 2 \cdot (27n^3 + 27n^2 + 9n + 1) + 2 \cdot (9n^2 + 6n + 1) + 66n + 22 + 2017 \\ &= 54n^3 + 72n^2 + 96n + 2043 \\ &= 3(18n^3 + 24n^2 + 32n + 681). \end{aligned}$$

C'est donc un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculons $q(3n+2)$.

$$\begin{aligned} q(3n+2) &= 2 \cdot (3n+2)^3 + 2 \cdot (3n+2)^2 + 22 \cdot (3n+2) + 2017 \\ &= 2 \cdot (27n^3 + 54n^2 + 36n + 8) + 2 \cdot (9n^2 + 12n + 4) + 66n + 44 + 2017 \\ &= 54n^3 + 126n^2 + 162n + 2085 \\ &= 3(18n^3 + 42n^2 + 54n + 695). \end{aligned}$$

C'est donc un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, dans tous les cas, $q(p)$ n'est pas premier.

6. Des vagues de solutions

Trouver toutes les valeurs entières de n faisant en sorte que l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 2 - \frac{1}{xn}$ admette exactement 2017 solutions pour x.

Solution :

Posons $t = \frac{\pi}{x}$ pour obtenir : $\sin(t) = 2 - \frac{t}{\pi n}$

Sachant que $-1 \le \sin(t) \le 1$, on a : $-1 \le 2 - \frac{t}{\pi n} \le 1$

On obtient que les valeurs limites de t sont $n\pi$ et $3n\pi$.

<u>Si $n > 0$</u> :

Soient $g(t) = \sin(t)$ et $d(t) = 2 - \frac{t}{\pi n}$. Si on interprète t comme étant le temps, on peut imaginer un point qui fait le tour d'un cercle de rayon 1 et dont l'ordonnée est $g(t)$, ainsi qu'un point descendant l'axe des y (de $y = 1$ à $y = -1$) et dont l'ordonnée est $d(t)$. Les solutions de l'équation correspondent aux valeurs de t où $g(t) = d(t)$, c'est-à-dire aux moments où les ordonnées du point en orbite et du point descendant le long de l'axe des y sont égales.

Si, pendant un tour de cercle, la condition $d(t) > 0$ est toujours valide ou que la condition $d(t) < 0$ est toujours valide, les ordonnées se croiseront exactement deux fois. La cas particulier à considérer correspond à celui du tour pendant lequel $d(t) = 0$. On a alors :

$$2 - \frac{t}{\pi n} = 0 \Rightarrow t = 2\pi n$$

Au moment où le point descendant l'axe des y croise l'axe des x, le point parcourant le cercle sera donc situé à l'angle $\theta = 0$. On distingue deux cas :

Cas 1 :

n est pair. Les limites de t étant $n\pi$ et $3n\pi$, le cercle est parcouru de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$. Le moment $t = 2\pi n$ correspond donc au début du tour, ce qui fait que les coordonnées sont égales à 3 moments pendant ce tour de cercle : initialement (lorsque $t = 2\pi n$), puis subséquemment 2 fois.

On a donc $(n-1)$ tours avec 2 solutions et 1 tour avec 3 solutions, pour un total de $(2n+1)$ solutions.

$$2n + 1 = 2017 \Rightarrow n = 1008$$

Cas 2 :

n est impair. Les limites de t étant $n\pi$ et $3n\pi$, le cercle est parcouru de $\theta = \pi$ à $\theta = 3\pi$. La valeur $t = 2\pi n$, obtenue lorsque $\theta = 2\pi$, est la seule solution pendant ce tour.

On a donc $(n-1)$ tours avec 2 solutions et 1 tour avec 1 solution, pour un total de $(2n-1)$ solutions.

$$2n - 1 = 2017 \Rightarrow n = 1009$$

Si $n < 0$:

Comme $3n\pi < n\pi$, t passera graduellement de $3n\pi$ à $n\pi$. Cette fois, $d(t)$ augmente, passant graduellement de -1 à 1. Encore une fois, si, pendant un tour, la condition $d(t) > 0$ est toujours valide ou que la condition $d(t) < 0$ est toujours valide, les ordonnées se croiseront exactement deux fois. Cette fois encore, $d(t) = 0$ si et seulement si :

$$2 - \frac{t}{\pi n} = 0 \Rightarrow t = 2\pi n$$

Au moment où le point montant l'axe des y croise l'axe des x, le point parcourant le cercle sera donc situé à l'angle $\theta = 0$. On distingue les deux même cas que précédemment :

Cas 1 :

n est pair. Les limites de t étant $3n\pi$ et $n\pi$, le cercle est parcouru de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$. La valeur $t = 2\pi n$, obtenue lorsque $\theta = 0$, correspond à la deuxième solution du tour qui se termine. Pendant le tour qui s'amorce, les coordonnées ne sont égales qu'à un moment.

On a donc $(|n|-1)=(-n-1)$ tours avec 2 solutions et 1 tour avec 1 solution, pour un total de $(-2n-1)$ solutions.

$$-2n-1=2017 \Rightarrow n=-1009$$

Cette solution est invalide puisqu'on a supposé un n pair.

<u>Cas 2</u> :

n est impair. Les limites de t étant $n\pi$ et $3n\pi$, le cercle est parcouru de $\theta=\pi$ à $\theta=3\pi$. Les ordonnées sont donc égales à 3 moments : un pour lequel $d(t)<0$, un pour lequel $d(t)=0$ (lorsque $\theta=2\pi$) et l'autre pour lequel $d(t)>0$.

On a donc $(|n|-1)=(-n-1)$ tours avec 2 solutions et 1 tour avec 3 solutions, pour un total de $(-2n+1)$ solutions.

$$-2n+1=2017 \Rightarrow n=-1008$$

Cette solution est invalide puisqu'on a supposé un n impair.

<u>Conclusion</u> : les deux seules solutions possibles sont $n=1008$ et $n=1009$.