Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial

Le mercredi 22 février 2017

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

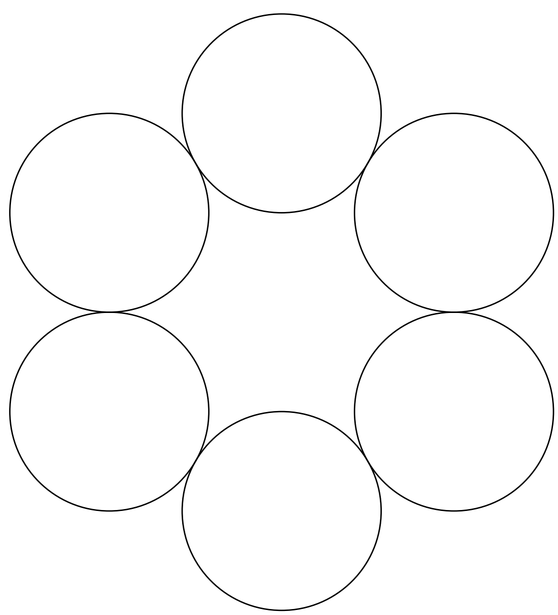
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note *: L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. Un rêve olympique

Simon a fait un rêve étrange : le conseil planétaire avait décidé de séparer l'Amérique du Nord et l'Amérique du Sud en deux continents distincts. Le Comité International Olympique en avait alors profité pour remodeler le logo olympique où les cinq anneaux colorés furent remplacés par six disques colorés. Ils optèrent pour une figure où les six disques de même taille ont leur centre sur un même cercle et où chaque disque est tangent avec ses deux voisins. À son réveil, Simon voulut reproduire ce logo en format géant en peignant chaque disque de couleur différente. Si le cercle qui passe par le centre des six disques a un rayon de 1 mètre, trouver quelle sera la surface totale des disques à peindre.



2. Tour de cubes

Paula a 4 cubes colorés de différentes dimensions. Le cube jaune a un volume de 21 000 cm^3, le cube bleu a un volume de 22 000 cm^3, le cube vert a un volume de 4 536 cm^3 et le cube rouge a un volume de 1 408 cm^3. Elle construit une petite tour en empilant le cube rouge par-dessus le cube vert sur une table où sont aussi déposés les deux autres cubes. Démontrer que sa tour est plus haute que le cube jaune, mais moins haute que le cube bleu.

3. Les tangentes sécantes

Identifier chaque point sur la courbe de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 35x + 34$ où la tangente à la courbe en ce point passe également par le point $(2,5)$.

4. L'ogre

Sachant que $\log_{16}(\log_4(\log_2(x))) = 504$, trouver la valeur de $\log_2(2 + \log_2(\log_{16}(x)))$.

5. Les premiers ne seront plus premiers

Laura a été mandatée pour composer une question pour un concours de mathématiques d'une durée de 2 heures ayant lieu le 22/2/2017. Avec ces chiffres, elle construit le polynôme $2p^3 + 2p^2 + 22p + 2017$, où p représente un nombre premier. Elle réalise ensuite qu'il est impossible qu'en évaluant ce polynôme on obtienne aussi un nombre premier. Prouver cette assertion.

6. Des vagues de solutions

Trouver toutes les valeurs entières de n faisant en sorte que l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 2 - \frac{1}{xn}$ admette exactement 2017 solutions pour x.