# Concours de l'Association mathématique du Québec
# Niveau collégial

**Le mercredi 24 février 2016**

## SOLUTIONNAIRE

---

**1. Les cubes du carré de sable**

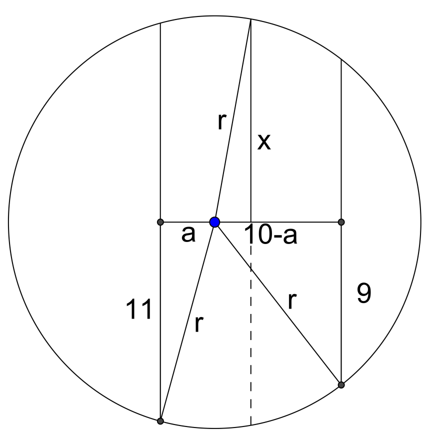
Le petit Simon s'amuse dans un carré de sable avec trois cubes emboîtables. Le plus petit cube a 4 cm d'arête et le plus grand 12 cm. Après avoir rempli le petit cube de sable, il le met dans celui de taille moyenne et il lui faut alors 600 g de sable supplémentaire pour le remplir. Il place alors le tout dans le grand cube et doit rajouter 2000 g de sable pour combler le cube. Quel est le volume du cube de taille moyenne ?

Remarque : On considère que l'épaisseur des cubes est négligeable.

*Solution* :
Soit $m_1$, la masse en grammes du sable dans le petit cube et $m_3$ la masse du sable dans le grand cube. Le volume du petit cube est de $64\,cm^3$, le volume du grand cube est 27 fois plus grand, donc $27m_1 = m_3$. De plus, par comparaison au cube de taille moyenne on a : $m_1 + 600 = m_3 - 2000$. En substituant $m_3$, on obtient $m_1 + 600 = 27m_1 - 2000$. En isolant la variable restante, on obtient $m_1 = 100$. Ainsi la masse du sable dans le cube de taille moyenne est de 700 g ; il est donc 7 fois plus gros que le petit. Son volume est alors de $7 \times 64 = 448\ \text{cm}^3$.

**2. Le hublot restauré**

Un vieux hublot circulaire n'a plus que deux barreaux parallèles, un de 22 cm et l'autre de 18 cm. Comme ceux-ci sont espacés de 10 cm et que les nouvelles normes de sécurité exigent que chaque ouverture ait une largeur maximale de 9 cm, on décide d'ajouter un autre barreau parallèle à mi-chemin des deux existants. Quelle sera la longueur de ce nouveau barreau ?



*Solution* :

Deux applications du théorème de Pythagore aux triangles rectangles ayant comme côtés un demi-barreau de longueur connue et le rayon, nous donnent :

$r^2 = 11^2 + a^2$ ,
$r^2 = 9^2 + (10 - a)^2$
$\Rightarrow 121 + a^2 = 81 + 100 - 20a + a^2$
$\Rightarrow 20a = 60$
$\Rightarrow a = 3$ et alors $r = \sqrt{121+9} = \sqrt{130}$ .

Le triangle rectangle ayant pour côtés la demi-longueur $x$ du barreau à rajouter et le rayon, a donc un troisième côté de longueur 2 (distance du barreau au centre). On trouve donc :

$x^2 + 4 = 130$
$\Rightarrow x = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$ .

La longueur du barreau à rajouter sera donc de $6\sqrt{14}$ cm.

## 3. À zéro nous sommes égaux

Un polynôme du troisième degré $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ a comme particularité que la moyenne de ses trois zéros réels, le produit de ses zéros et la somme de ses coefficients $a, b$ et $c$ sont tous égaux. Sachant que l'ordonnée à l'origine du polynôme est 5, trouvez la valeur du coefficient $b$.

*Solution* :

Soit $z_1, z_2, z_3$ les trois zéros du polynôme. Celui-ci se factorise donc en
$P(x) = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = x^3 - (z_1 + z_2 + z_3)x^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)x - z_1z_2z_3$ .

Comme l'ordonnée à l'origine $P(0) = 5$, on en déduit que $z_1z_2z_3 = -5$ (qui est le produit des zéros). Vu que la moyenne des zéros doit aussi donner $-5$, la somme des zéros est donc $-15$ (c'est, à un signe près, le coefficient de $x^2$).

En remplaçant dans le polynôme on a donc
$P(x) = x^3 + 15x^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)x + 5$, où $(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$ correspond à $b$.

Comme la somme des coefficients $a, b$ et $c$ doit aussi donner $-5$, on a $15+b+5 = -5$ , d'où $b = -25$.

## 4. Le plancher absolu

Trouvez toutes les valeurs réelles de $x$ vérifiant l'équation $\dfrac{\lfloor x \rfloor + 1}{5} = |11 - x|$.

Remarque : La fonction plancher $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.

*Solution* :

Soit $x = n + d$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in [0, 1[$.

L'équation peut alors s'écrire

$\dfrac{n+1}{5} = |11 - n - d|$

Si $n \leq 10$, alors le contenu de la valeur absolue est positif et on a

$\dfrac{n+1}{5} = 11 - n - d$ ,
$6n = 54 - 5d$

On a donc $6n \in ]49, 54]$, et le seul multiple de 6 dans cet intervalle étant 54, on en déduit que $d = 0$ et $n = 9$, ce qui implique que $x = 9$.

Si $n \geq 11$, alors le contenu de la valeur absolue est négatif et on a

$\dfrac{n+1}{5} = n + d - 11$,
$4n = 56 - 5d$ .

On a donc $4n \in ]51, 56]$ et il y a alors deux multiples de 4 dans cet intervalle, soit 52 et 56. Pour 52 on aura que $d = \frac{4}{5}$ et $n = 13$, ce qui implique que $x = \frac{69}{5}$, et pour 56 on aura que $d = 0$ et $n = 14$, ce qui implique que $x = 14$.

Les trois valeurs possibles de $x$ étant solutions de l'équation sont donc 9, $\frac{69}{5}$ et 14.

## 5. Des foyers en surface

Trouvez la surface de l'ellipse qui est tangente à la droite $y = -\dfrac{x}{3} + 5$ et dont les foyers sont les points (-5,0) et (5,0).

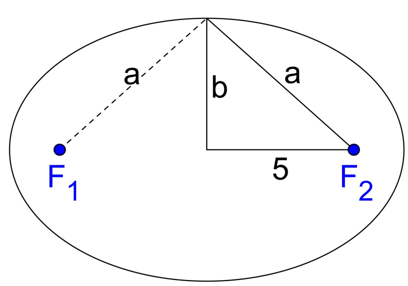
*Solution* :
Soit$(x, y)$ le point d'intersection entre la droite et l'ellipse. Il est impossible qu'une des deux coordonnées soit 0 car la droite tangente serait verticale ou horizontale, ce qui n'est pas le cas.
Par l'équation de la droite tangente, on a

$$y = -\frac{x}{3} + 5 , \tag{1}$$

et comme le point se situe sur une ellipse centrée à l'origine on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \tag{2}$$

où $a$ et $b$ sont les valeurs des deux demi-axes de l'ellipse.



Pour tout point de l'ellipse la somme des distances avec les foyers est constante et vaut $2a$. On peut donc relier les longueurs des demi-axes et la distance entre le centre et un foyer par le théorème de Pythagore.

$$25 = a^2 - b^2 \; . \tag{3}$$

On peut obtenir une quatrième équation car on sait que la dérivée au point $(x, y)$ correspond à la pente de la tangente qui est $-\frac{1}{3}$. Par dérivation implicite de (2) on obtient alors

$$-\frac{1}{3} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \; . \tag{4}$$

On peut isoler $a^2$ dans l'équation (4)

$$a^2 = \frac{3b^2 x}{y} \; . \tag{5}$$

En substituant $a^2$ dans l'équation (2) on obtient

$$\frac{xy}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; , \tag{6}$$

$$\frac{xy}{3} + y^2 = b^2 \; . \tag{7}$$

En substituant $\frac{x}{3}$ à partir de l'équation (1), on obtient

$$(-y+5)y + y^2 = b^2 \; , \tag{8}$$

$$5y = b^2 \; , \tag{9}$$

En substituant $b^2$ dans (5) on obtient

$$a^2 = 15x \; , \tag{10}$$

En substituant $a^2$ et $b^2$ dans l'équation (3) on obtient

$$25 = 15x - 5y \; , \tag{11}$$

$$5 = 3x - y \; . \tag{12}$$

En substituant le $y$ de l'équation (1) dans la (12) on trouve,

$$5 = 3x - (-\frac{x}{3} + 5) \; , \tag{13}$$

$$x = 3 \; , \tag{14}$$

À partir des équations (12) et (14) on trouve

$$y = 4 \; , \tag{15}$$

En jumelant les équations (10) et (14) ainsi que (9) et (15), on obtient

$$a^2 = 45 \; , \tag{16}$$

$$b^2 = 20 \; . \tag{17}$$

L'aire d'une ellipse étant donnée par $\pi ab$, celle de notre ellipse est donc de $\sqrt{45}\sqrt{20}\pi = 30\pi$ u$^2$.

## 6. Le marathon digital

Xavier doit trouver le code d'accès de sa nouvelle remise, barrée par une serrure à combinaison ayant 9 boutons numérotés de 1 à 9 et placés en trois rangées de trois touches, comme sur un clavier numérique standard. La combinaison est d'une longueur de quatre chiffres. Après qu'on ait appuyé sur quatre touches, le système vérifie si le code est le bon, c'est-à-dire si l'on a appuyé sur les bons chiffres dans le bon ordre, le même chiffre pouvant revenir plusieurs fois. Si oui, la porte se déverrouille. Sinon, le système se réinitialise et il faut entrer quatre nouveaux chiffres.

Xavier est méthodique et il essaiera toutes les combinaisons en ordre croissant de 1111 à 9999, mais malheureusement pour lui la bonne combinaison est 9999 ! Quelle sera alors la distance que son index aura parcourue entre le moment où il appuie sur le 1 initial et le moment où il appuiera sur le 9 final ? Supposez qu'il va en ligne droite du centre d'une touche au centre de l'autre. La distance entre le centre de deux touches adjacentes (horizontalement ou verticalement) est de 2 centimètres et on peut négliger la distance parcourue lors de l'enfoncement d'une touche.

*Solution* :

Le nombre de combinaisons est $9^4$, pour un total de $4 \times 9^4$ touches à presser. Soient $d_{1379}$, $d_{2468}$ et $d_5$ les distances moyennes à parcourir vers la prochaine touche lorsqu'on part d'une touche de coin, de milieu et de centre, respectivement :

$$\begin{aligned} d_{1379} &= \left(\tfrac{1}{9} \times 0 + \tfrac{2}{9} \times 1 + \tfrac{1}{9} \times \sqrt{2} + \tfrac{2}{9} \times 2 + \tfrac{2}{9} \times \sqrt{5} + \tfrac{1}{9}\sqrt{8}\right) \times 2 \\ &= \tfrac{12}{9} + \tfrac{6}{9}\sqrt{2} + \tfrac{4}{9}\sqrt{5}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{2468} &= \left(\tfrac{1}{9} \times 0 + \tfrac{3}{9} \times 1 + \tfrac{1}{9} \times 2 + \tfrac{2}{9}\sqrt{2} + \tfrac{2}{9}\sqrt{5}\right) \times 2 \\ &= \tfrac{10}{9} + \tfrac{4}{9}(\sqrt{2} + \sqrt{5})\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_5 &= \left(\tfrac{1}{9} \times 0 + \tfrac{4}{9} \times 1 + \tfrac{4}{9} \times \sqrt{2}\right) \times 2 \\ &= \tfrac{8}{9}(1 + \sqrt{2})\,. \end{aligned}$$

Comme $\frac{4}{9}$ des touches sont des touches de coin, $\frac{4}{9}$ des touches de milieu et $\frac{1}{9}$ est une touche de centre, la distance totale à parcourir semble être :

$$d' = 4 \times 9^4 \left(\tfrac{4}{9} \times d_{1379} + \tfrac{4}{9} \times d_{2468} + \tfrac{1}{9} \times d_5\right).$$

Il reste à considérer qu'on a supposé qu'un déplacement est nécessaire après chaque touche, alors que suite à la dernière touche de la dernière combinaison, 9999, on n'a pas à retourner au début pour faire le code 10000. On doit donc soustraire la distance entre le chiffre 9 et le chiffre 1. La distance cherchée est par conséquent :

$$d = d' - 2\sqrt{8} = 31104 + 15548\sqrt{2} + 10368\sqrt{5} \text{ cm.}$$