

# Concours de l'Association mathématique du Québec Niveau collégial

Le mercredi 24 février 2016

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

*Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.*

*Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.*

**Note :** *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

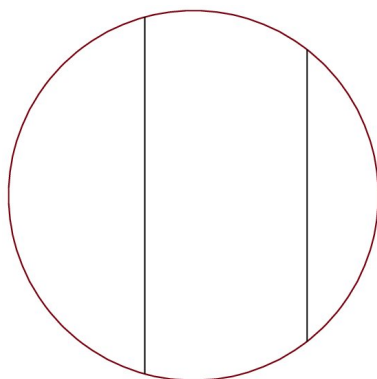
## 1. Les cubes du carré de sable

Le petit Simon s'amuse dans un carré de sable avec trois cubes emboîtables. Le plus petit cube a 4 cm d'arête et le plus grand 12 cm. Après avoir rempli le petit cube de sable, il le met dans celui de taille moyenne et il lui faut alors 600 g de sable supplémentaire pour le remplir. Il place alors le tout dans le grand cube et doit rajouter 2000 g de sable pour combler le cube. Quel est le volume du cube de taille moyenne ?

Remarque : On considère que l'épaisseur des cubes est négligeable.

## 2. Le hublot restauré

Un vieux hublot circulaire n'a plus que deux barreaux parallèles, un de 22 cm et l'autre de 18 cm. Comme ceux-ci sont espacés de 10 cm et que les nouvelles normes de sécurité exigent que chaque ouverture ait une largeur maximale de 9 cm, on décide d'ajouter un autre barreau parallèle à mi-chemin des deux existants. Quelle sera la longueur de ce nouveau barreau ?



### 3. À zéro nous sommes égaux

Un polynôme du troisième degré  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  a comme particularité que la moyenne de ses trois zéros réels, le produit de ses zéros et la somme de ses coefficients  $a, b$  et  $c$  sont tous égaux. Sachant que l'ordonnée à l'origine du polynôme est 5, trouvez la valeur du coefficient  $b$ .

### 4. Le plancher absolu

Trouvez toutes les valeurs réelles de  $x$  vérifiant l'équation  $\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{5} = |11 - x|$ .

Remarque : La fonction plancher  $\lfloor x \rfloor$  représente le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

### 5. Des foyers en surface

Trouvez la surface de l'ellipse qui est tangente à la droite  $y = -\frac{x}{3} + 5$  et dont les foyers sont les points  $(-5,0)$  et  $(5,0)$ .

### 6. Le marathon digital

Xavier doit trouver le code d'accès de sa nouvelle remise, barrée par une serrure à combinaison ayant 9 boutons numérotés de 1 à 9 et placés en trois rangées de trois touches, comme sur un clavier numérique standard. La combinaison est d'une longueur de quatre chiffres. Après qu'on ait appuyé sur quatre touches, le système vérifie si le code est le bon, c'est-à-dire si l'on a appuyé sur les bons chiffres dans le bon ordre, le même chiffre pouvant revenir plusieurs fois. Si oui, la porte se déverrouille. Sinon, le système se réinitialise et il faut entrer quatre nouveaux chiffres.

Xavier est méthodique et il essaiera toutes les combinaisons en ordre croissant de 1111 à 9999, mais malheureusement pour lui la bonne combinaison est 9999 ! Quelle sera alors la distance que son index aura parcourue entre le moment où il appuie sur le 1 initial et le moment où il appuiera sur le 9 final ? Supposez qu'il va en ligne droite du centre d'une touche au centre de l'autre. La distance entre le centre de deux touches adjacentes (horizontalement ou verticalement) est de 2 centimètres et on peut négliger la distance parcourue lors de l'enfoncement d'une touche.