Concours de l'Association mathématique du Québec
Niveau collégial

Le mercredi 18 février 2015

SOLUTIONNAIRE

---

1. Simon a raison

Jacques s'amuse à trouver des nombres consécutifs dont la somme donne 2015. Il montre à Simon son dernier résultat, 5 entiers consécutifs : 401, 402, 403, 404 et 405 dont la somme donne bien 2015. Simon, pas tellement impressionné, lui affirme alors «Je suis certain que tu ne réussiras pas à trouver 6 entiers consécutifs dont la somme donne 2015». Jacques se met alors de suite au travail. Montrez que ses efforts sont vains car Simon a raison.

Solution :
Soit n le premier nombre de la séquence d'entiers. La somme des 6 entiers consécutifs sera alors $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5) = 6n+15 = 3(2n+5)$. Cette somme est donc nécessairement divisible par 3 alors que 2015 ne l'est pas (la somme de ses chiffres ne l'étant pas).

2. Les paraboles siamoises

L'équation générale d'une parabole est $y = ax^2 + bx + c$ et sa courbure ne dépend que du paramètre a dont le signe indique également le sens de la parabole. Soit deux paraboles ayant la même courbure et qui ont leur sommet sur l'axe des x. Sachant que la tangente à la première parabole au point (-1, 8) est également tangente à la seconde parabole au point (1, -8), trouvez l'équation de chaque parabole.

Solution :

Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation de la première parabole. Les deux paraboles ayant leur sommet sur l'axe des x et les coordonnées en y des deux points connus étant de signe différent, une parabole sera toujours positive et l'autre toujours négative. Comme elles ont la même courbure, l'équation de la seconde sera de la forme
$y = -ax^2 + dx + e$.

La tangente reliant les points (-1,8) et (1, -8) a pour pente -8. Celle-ci correspond à la dérivée en $x = -1$ de la première parabole, soit $2a(-1)+b = -8$ et à celle de la seconde en $x = 1$, soit $-2a(1) + d = -8$. On en déduit que $b = d$ et que la seconde parabole est de la forme $y = -ax^2 + bx + e$

Les paraboles n'ayant qu'un seul zéro on aura également que $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{b^2 - 4(-a)e}$ $= 0$ ce qui permet de déduire que $e = -c$ et que l'équation de la seconde est de la forme $y = -ax^2 + bx - c$.

Reste à résoudre le système d'équations formé de ces deux dernières informations et le fait que le premier point vérifie la première équation, soit :

$-2a + b = -8$
$b^2 - 4ac = 0$
$a - b + c = 8$

La première équation nous dit que $b = 2a - 8$. En remplaçant b dans la troisième équation on trouve que $c = a$.

Si on insère ces deux résultats dans la seconde équation, on trouve que $a = 2$ et alors $b = -4$ et $c = 2$.

Les équations des paraboles sont donc $y = 2x^2 - 4x + 2$ et $y = -2x^2 - 4x - 2$.

3. Quand l'abscisse se confond avec l'ordonnée

Un point fixe d'une fonction est une valeur x telle que $f(x) = x$.
Trouvez un point fixe d'une fonction $f(x)$ telle que $f(u \log_2 u) = u \log_8 u + 4u$ pour tout réel $u > 0$.

Solution :
On cherche x tel que $f(x) = x$

Posons $x = u \log_2 u$. On a alors :

$f(u \log_2 u) = u \log_2 u$

$\Rightarrow u \log_8 u + 4u = u \log_2 u$

$\Rightarrow u \log_8 u + 4u = 3u \log_8 u$

$\Rightarrow 4u = 2u \log_8 u$

$\Rightarrow \log_8 u = 2$

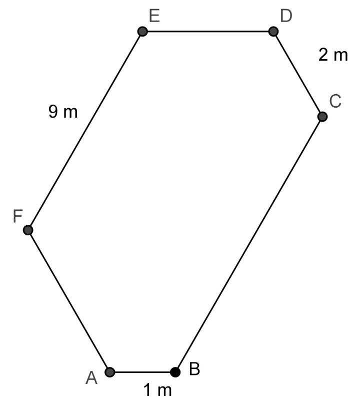
$\Rightarrow u = 8^2 = 64$

Donc, $x = u \log_2 u = 64 \cdot 6 = 384$

Le point fixe est donc $x = 384$.

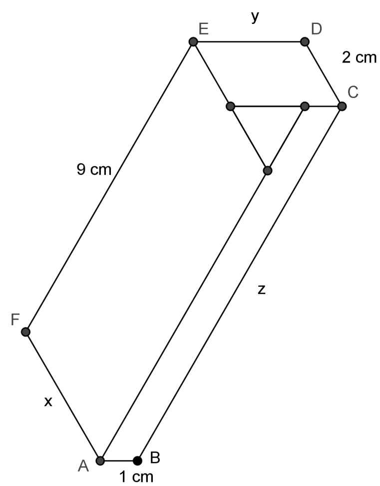
4. 2015, année de la chèvre

Pour souligner l'année de la chèvre, Paula veut construire pour ses chèvres un enclos hexagonal en faisant alterner des murs de métal et des murs de bois. Elle a déjà les 3 murs de métal de longueurs 1 mètre, 2 mètres et 9 mètres et elle veut utiliser tout son bois, qui permet d'obtenir une longueur totale de 18 mètres, pour construire les 3 autres murs. Pour faire les coins en A, B, C, D, E et F, elle utilisera des pentures à ouverture fixe qui forment un angle de 120° et permettent de joindre un mur de métal et un mur de bois. Trouvez quelles seront les longueurs des murs de bois de son enclos.



(*La figure n'est pas à l'échelle.*)

Solution 1 :
Soit x la longueur, en mètres, du mur AF, y celle du mur ED et z celle du mur CB.



Si on trace des droites parallèles aux murs de bois pour former des parallélogrammes, à cause des angles, on obtient que ces parallélogrammes entourent un triangle équilatéral. Les côtés de ce triangle correspondent alors à $x-2$, $y-1$ et $z-9$.

La double égalité $x-2 = y-1 = z-9$ permet d'obtenir les équations :

$$x-2 = y-1 \quad \Rightarrow \quad y = x-1$$
$$x-2 = z-9 \quad \Rightarrow \quad z = x+7$$

Sachant que la longueur totale des murs de bois est de 18 mètres, on a également :

$$x+y+z = 18$$

en y remplaçant y et z par les expressions précédentes on trouve la solution :

$x = 4$, $y = 3$ et $z = 11$.

Les murs sont donc respectivement de longueurs 4 mètres, 3 mètres et 11 mètres.

Solution 2 :

Considérons les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{AF} = x\ (\cos(120°), \sin(120°)) = x\ (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{FE} = 9\ (\cos(60°), \sin(60°)) = 9\ (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{ED} = y\ (\cos(0°), \sin(0°)) = y\ (1,0)$

$\overrightarrow{DC} = 2\ (\cos(\text{-}60°), \sin(\text{-}60°)) = 2\ (\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{CB} = z\ (\cos(\text{-}120°), \sin(\text{-}120°)) = z\ (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{BA} = 1\ (\cos(\text{-}180°), \sin(\text{-}180°)) = (1,0)$

Sachant que l'addition de tous ces vecteurs nous ramène au point de départ, tant en x qu'en y, on a les deux équations suivantes :

$$-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} + y + 1 - \frac{1}{2}z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + 2y - z = -9$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \quad \Rightarrow \quad x - z = -7$$

De plus on sait que la longueur des murs de bois est de 18 mètres.

$$\Rightarrow x + y + z = 18$$

En additionnant la première et la troisième équation, on obtient :

$$3y = 9 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

Les deux dernières équations sont maintenant :

$$x - z = -7$$
$$x + z = 15$$

On obtient ainsi :

$$(x, y, z) = (4, 3, 11)$$

Les murs sont donc respectivement de longueurs 4 mètres, 3 mètres et 11 mètres.

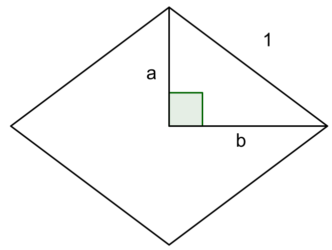
5. Presque mais pas tout à fait...

On peut montrer que si deux figures sont semblables, alors le rapport $\frac{périmètre^2}{surface}$ est constant. Mais la réciproque n'est pas vraie : il se peut que deux figures aient le même rapport $\frac{périmètre^2}{surface}$ et ne soient pas semblables. Dans ce cas, on dit que les figures sont **presque semblables**.

Trouvez les dimensions d'un losange qui est presque semblable à un rectangle de 2 unités de largeur et 3 unités de longueur.

Solution :

Dans le rectangle, le périmètre vaut 10 unités et la surface vaut 6 unités^2, alors $\frac{périmètre^2}{surface} = \frac{10^2}{6} = \frac{50}{3}$. On cherche un losange ayant ce rapport. Comme toute figure semblable a le même rapport, posons que la longueur de chacun des côtés du losange vaut 1. Le périmètre sera de 4 et en substituant la valeur du rapport et du périmètre dans la formule du rapport $\frac{50}{3} = \frac{4^2}{surface}$ on obtient une surface de $\frac{24}{25}$.



Soit a et b les longueurs des demi-diagonales du losange. Par un calcul de sa surface on obtient $2ab = \frac{24}{25}$ et par Pythagore on a que $a^2 + b^2 = 1$. En additionnant les deux équations, on obtient $a^2 + 2ab + b^2 = \frac{49}{25}$ donc $a + b = \frac{7}{5}$ (comme a et b sont des longueurs on ne considère que la réponse positive). En isolant b et en le substituant dans l'équation de la surface on a $2a(\frac{7}{5} - a) = \frac{24}{25}$ ce qui est équivalent à $0 = 25a^2 - 35a + 12 = (5a-4)(5a-3)$ donc $a = \frac{4}{5}$ ou $a = \frac{3}{5}$.
Avec ces valeurs, on obtient pour b les valeurs inverses, soit $b = \frac{3}{5}$ ou $b = \frac{4}{5}$.

Donc les diagonales du losange sont de $\frac{6}{5}$ et $\frac{8}{5}$. Bref tout losange dont les diagonales sont 1,2 fois et 1,6 fois la longueur des côté est un losange presque semblable à un rectangle de 2 unités de largeur et 3 unités de longueur.

6. Les faux binaires

Le produit de 13 par 77 donnant 1001, le nombre 13 possède un multiple dont l'écriture est composée uniquement de 1 et de 0. Démontrez que tous les nombres naturels ont au moins un multiple dont l'écriture (en base 10) est formée uniquement de 1 et de 0.

Solution :

Soit n un nombre naturel dont on cherche le multiple. Considérons les nombres composés uniquement du chiffre 1 ayant au plus $n+1$ chiffres. Alors ces nombres sont de la forme $\sum_{k=0}^{p} 10^k$ où p est un entier variant de de 0 à n. Calculons le reste de la division par n de tous ces nombres. Comme il n'y a que n réponses possibles, il existe deux nombres ayant le même reste de la division par n (par le principe du pigeonnier).

Soit a et b les deux nombres en question avec $a > b$ et r leur reste commun. Posons $a = \sum_{k=0}^{p_a} 10^k$ et $b = \sum_{k=0}^{p_b} 10^k$ avec $n \geq p_a > p_b \geq 0$. Comme ils ont un reste de r lors de la division par n, il existe deux nombres naturels d_a et d_b tels que $a = nd_a + r$ et $b = nd_b + r$. En soustrayant b de a on obtient $a - b = \sum_{k=p_b+1}^{p_a} 10^k$ qui est un nombre composé uniquement de 1 au début et suivi d'un certain nombre de 0. D'autre part $a - b = (nd_a + r) - (nd_b + r) = nd_a - nd_b = n(d_a - d_b)$. Donc $a - b$ est aussi un multiple de n et c'est ainsi le nombre cherché.