

# Concours de l'Association mathématique du Québec Niveau collégial

Le mercredi 18 février 2015

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

*Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.*

*Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.*

**Note :** *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

## 1. Simon a raison

Jacques s'amuse à trouver des nombres consécutifs dont la somme donne 2015. Il montre à Simon son dernier résultat, 5 entiers consécutifs : 401, 402, 403, 404 et 405 dont la somme donne bien 2015. Simon, pas tellement impressionné, lui affirme alors «Je suis certain que tu ne réussiras pas à trouver 6 entiers consécutifs dont la somme donne 2015». Jacques se met alors de suite au travail. Montrez que ses efforts sont vains car Simon a raison.

## 2. Les paraboles siamoises

L'équation générale d'une parabole est  $y = ax^2 + bx + c$  et sa courbure ne dépend que du paramètre  $a$  dont le signe indique également le sens de la parabole. Soit deux paraboles ayant la même courbure et qui ont leur sommet sur l'axe des  $x$ . Sachant que la tangente à la première parabole au point  $(-1, 8)$  est également tangente à la seconde parabole au point  $(1, -8)$ , trouvez l'équation de chaque parabole.

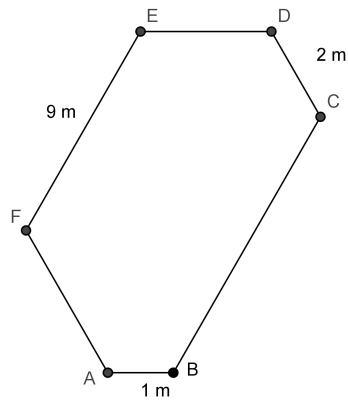
## 3. Quand l'abscisse se confond avec l'ordonnée

Un point fixe d'une fonction est une valeur  $x$  telle que  $f(x) = x$ .

Trouvez un point fixe d'une fonction  $f(x)$  telle que  $f(u \log_2 u) = u \log_8 u + 4u$  pour tout réel  $u > 0$ .

#### 4. 2015, année de la chèvre

Pour souligner l'année de la chèvre, Paula veut construire pour ses chèvres un enclos hexagonal en faisant alterner des murs de métal et des murs de bois. Elle a déjà les 3 murs de métal de longueurs 1 mètre, 2 mètres et 9 mètres et elle veut utiliser tout son bois, qui permet d'obtenir une longueur totale de 18 mètres, pour construire les 3 autres murs. Pour faire les coins en A, B, C, D, E et F, elle utilisera des pentures à ouverture fixe qui forment un angle de  $120^\circ$  et permettent de joindre un mur de métal et un mur de bois. Trouvez quelles seront les longueurs des murs de bois de son enclos.



(La figure n'est pas à l'échelle.)

#### 5. Presque mais pas tout à fait...

On peut montrer que si deux figures sont semblables, alors le rapport  $\frac{\text{périmètre}^2}{\text{surface}}$  est constant. Mais la réciproque n'est pas vraie : il se peut que deux figures aient le même rapport  $\frac{\text{périmètre}^2}{\text{surface}}$  et ne soient pas semblables. Dans ce cas, on dit que les figures sont **presque semblables**.

Trouvez les dimensions d'un losange qui est presque semblable à un rectangle de 2 unités de largeur et 3 unités de longueur.

#### 6. Les faux binaires

Le produit de 13 par 77 donnant 1001, le nombre 13 possède un multiple dont l'écriture est composée uniquement de 1 et de 0. Démontrez que tous les nombres naturels ont au moins un multiple dont l'écriture (en base 10) est formée uniquement de 1 et de 0.