Concours de l'AMQ 2014, ordre collégial

Solutionnaire

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

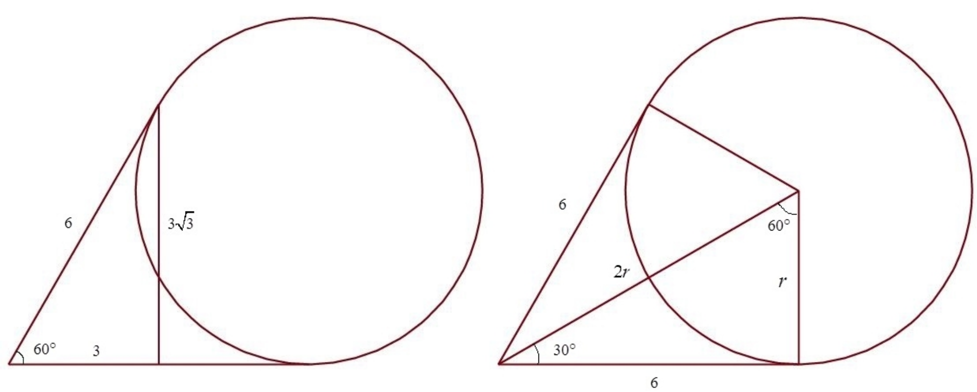
***Note** : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. Le silo pointu

On veut augmenter la capacité d'un silo à grains cylindrique de 20 mètres de hauteur en rajoutant deux murs verticaux de même longueur et aussi de hauteur 20 mètres. Dans la vue aérienne ci-dessous, si le point commun aux deux murs est positionné à l'origine, un des murs longe l'axe des x et l'autre mur est tangent au silo au point de coordonnées $(3, 3\sqrt{3})$, celles-ci étant en mètres. Quelle sera la capacité supplémentaire obtenue avec cette nouvelle construction ?

Solution :



Le triangle rectangle ayant pour côtés les coordonnées du point connu a pour hypoténuse 6. Ce nombre étant le double du côté de 3 unités, l'angle au sommet est de 30° et celui entre les murs de 60° (ce résultat peut aussi s'obtenir à l'aide des fonctions trigonométriques).

Les murs étant tangents au cercle sont perpendiculaires aux rayons les reliant au centre du cercle. On a donc deux nouveaux triangles rectangles identiques avec un angle de 30°. Le segment reliant le centre du cercle à l'intersection des murs vaut donc le double du rayon.

L'autre côté d'un triangle valant 6, on en déduit (par Pythagore) que le rayon du cercle est $2\sqrt{3}$. L'aire des deux triangles est donc $12\sqrt{3}$.

L'angle au centre du secteur circulaire est 120°. Le secteur correspond donc au tiers du cercle et a alors une aire de 4π. L'aire de la nouvelle section vaut donc $12\sqrt{3} - 4\pi = 4(3\sqrt{3} - \pi)$ et le volume correspondant est ainsi de $80(3\sqrt{3} - \pi)$ mètres cubes.

2. La question de Simon

Simon est en train d'effectuer un calcul sur sa calculatrice et celle-ci affiche le nombre 2.302775638 au moment où, par mégarde, il accroche le bouton pour élever au carré. Il remarque alors que le 2 du début se transforme en 5 mais que toutes les décimales demeurent exactement les mêmes ! ! Intrigué, il se demande si ce sont bel et bien toutes les décimales qui sont inchangées (et non seulement celles affichées) et s'il y a d'autres nombres entre 2 et 3 qui auraient cette caractéristique d'avoir le même développement décimal que leur carré. Aidez-le en trouvant tous les nombres répondant à ces critères.

Solution :

Soit x le nombre cherché. Si x^2 a les mêmes décimales alors $x^2 - x = n$ où n est un entier positif. x étant un nombre entre 2 et 3, la partie entière de x^2 est un nombre qui peut varier de 4 à 8 et les valeurs possibles de n sont donc 2, 3, 4, 5 ou 6.

On a $x^2 - x - n = 0$ dont les zéros sont (on ne conserve que la branche positive pour avoir un zéro entre 2 et 3) :

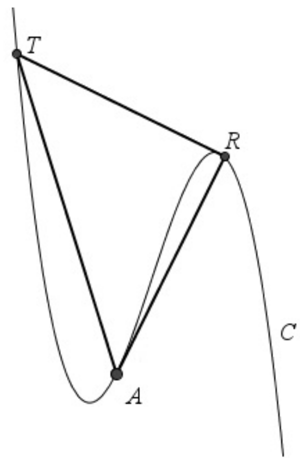
$n = 2 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{9}}{2}$ (*)
$n = 3 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
$n = 4 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{17}}{2}$
$n = 5 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{21}}{2}$
$n = 6 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{25}}{2}$ (*)

(*) La première et la dernière valeurs sont à rejeter étant donné qu'elles correspondent à 2 et 3 (et qu'on cherche des nombres *entre* 2 et 3).

Il y a donc 3 nombres vérifiant les critères et qui répondent à la question de Simon (qui était tombé sur le premier de ces trois nombres).

3. Art abstrait

Soit le triangle ART rectangle en R et soit C une courbe décrite par un polynôme de degré 3. Les points A, R et T se situent sur la courbe C. Le point A est à l'origine et le point R se situe en (1, 2). De plus, AR est tangent à la courbe C en A et RT est tangent à la courbe C en R. Calculer l'aire du triangle ART.



Solution :

On a la courbe C d'équation $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On sait qu'elle passe par l'origine A :

$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$.

L'équation a donc la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

Et comme elle passe par le point R (1, 2) :

$f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$.

L'équation devient donc $f(x) = ax^3 + bx^2 + (2 - a - b)x$.

Comme AR est tangent à la courbe en A et de pente 2 :

$f'(0) = 2$
$\Rightarrow 2 - a - b = 2 \Rightarrow a = -b$.

L'équation est maintenant $f(x) = ax^3 - ax^2 + 2x$.

Comme RT est tangent à la courbe en R et perpendiculaire à AR :

$f'(1) = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow 3a - 2a + 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$.

L'équation cherchée est donc $f(x) = -\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x$.

Le point T est à l'intersection entre la droite passant par RT et $f(x) = -\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x$.

Comme le point T est sur la droite qui passe par $R(1,2)$ et est de pente $-\frac{1}{2}$, on sait qu'il est de la forme $(x, y) = (1 + 2k, 2 - k)$.

$\Rightarrow f(1 + 2k) = 2 - k,$

$\Rightarrow -\frac{5}{2}(1 + 2k)^3 + \frac{5}{2}(1 + 2k)^2 + 2(1 + 2k) = 2 - k,$

$\Rightarrow -\frac{5}{2}(8k^3 + 12k^2 + 6k + 1) + \frac{5}{2}(4k^2 + 4k + 1) + 2(1 + 2k) = 2 - k,$

$\Rightarrow -20k^3 - 30k^2 - 15k + 1 - \frac{5}{2} + 10k^2 + 10k + \frac{5}{2} + 2 + 4k = 2 - k,$

$\Rightarrow -20k^3 - 20k^2 = 0,$

$\Rightarrow -20k^2(1 + k) = 0,$

$\Rightarrow k = 0$ ou $k = -1$.

$k = 0$ donne le point $R(1,2)$ déjà connu. $k = -1$ donne le point $T(-1,3)$.

On a donc le triangle : $\quad A(0,0) \quad R(1,2) \quad T(-1,3)$.

Le triangle étant rectangle en R son aire s'obtient par :

$\frac{1}{2}m\overline{AR} \cdot m\overline{RT} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} \cdot \sqrt{(3-2)^2 + (-1-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{5}{2}$.

On pourrait aussi utiliser le produit vectoriel pour en déterminer l'aire :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AR} \text{ x } \overrightarrow{AT} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,5)$$

$\Rightarrow$ Aire $= \frac{1}{2}|\vec{v}| = \frac{5}{2}$.

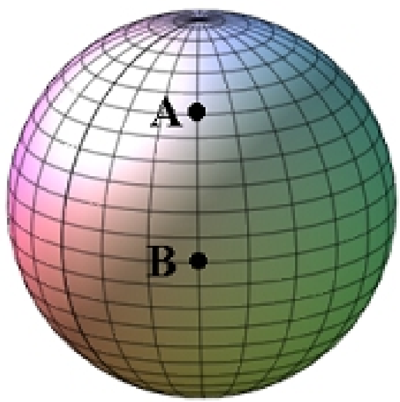
L'aire du triangle ART est donc $\frac{5}{2}$.

4. Le choix des cieux

Les satellites utilisés pour le positionnement par GPS permettent de localiser précisément n'importe quel endroit sur Terre. On programme ceux-ci de façon à ce qu'ils choisissent complètement au hasard 5 endroits sur notre planète. Si on suppose que la Terre est une sphère, quelle est la probabilité que l'on puisse trouver une demi-sphère (frontière incluse) à la surface de laquelle au moins 4 des points choisis soient situés ?

Solution :

Soit A, B, C, D et E les 5 points choisis au hasard. On peut toujours tourner la sphère de façon à avoir A et B sur une même circonférence.



Soit, dans cette position, S_1 la demi-sphère gauche (incluant A et B sur la frontière) et S_2 la demi-sphère droite (incluant aussi A et B sur la frontière).

Chaque point de la sphère fait, soit partie de S_1, soit partie de S_2, soit des deux. Il est donc certain que parmi les points C, D et E, au moins 2 feront partie de la même demi-sphère (S_1 ou S_2). Nous aurons donc bel et bien 4 points faisant partie de le même demi-sphère, ce qui fait que la probabilité cherchée est 1.

5. Derrière chaque premier se cache une racine

Démontrer que pour tout nombre premier $p > 3$, il existe un entier n vérifiant l'égalité $p = \sqrt{24n+1}$.

Solution :

Isolons $24n$ dans l'égalité. On obtient que $24n = p^2 - 1$. Donc si on démontre que $p^2 - 1$ est un multiple de 24, alors cela démontre l'existence du n.

$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$

p est impair, car p est premier et strictement plus grand que 3, donc $p-1$ est pair et $p+1$ est pair. De plus, comme $p-1$ et $p+1$ sont deux nombres pairs consécutifs, un des deux est un multiple de 4. Donc leur produit est un multiple de 8.

p n'est pas un multiple de 3 car p est premier et strictement plus grand que 3. Soit $p-1$, p et $p+1$ qui sont trois entiers consécutifs, un des trois est nécessairement un multiple de trois et ce n'est pas p, donc le produit de $p-1$ et $p+1$ est un multiple de 3.

$p^2 - 1$ étant à la fois un multiple de 8 et un multiple de 3, on conclut que c'est un multiple de 24 et donc qu'il existe un entier n tel que $24n = p^2 - 1$. Comme p est positif, n l'est aussi, c'est donc un nombre naturel. En isolant p on obtient que $p = \sqrt{24n+1}$.

6. 8 à tous les niveaux

Soit $M = n^8 - 8^4$ où n est un entier supérieur à 8. Démontrer que M peut toujours se décomposer en un produit de 4 entiers différents et supérieurs à 1.

Solution :

Factorisons $n^8 - 8^4$.
$n^8 - 8^4 = (n^4 - 8^2)(n^4 + 8^2) = (n^2+8)(n^2-8)(n^4+8^2)$

Les deux premiers facteurs ne pouvant se factoriser de manière entière, essayons le troisième ; trouvons a et b tels que $(n^2 + an + 8)(n^2 + bn + 8) = n^4 + 8^2$.

Pour équilibrer les n^3 (et les n) il faut que $a + b = 0$.
Pour équilibrer les n^2, il faut que $ab = -16$.
On trouve que $a = 4$ ou $b = -4$ (ou l'inverse qui redonne les mêmes facteurs).

Donc $n^8 - 8^4 = (n^2+8)(n^2-8)(n^2+4n+8)(n^2-4n+8)$.

Il ne reste qu'à démontrer que ces 4 facteurs sont différents entre eux et supérieurs à 1.

Comme $n > 8$, alors les termes sans non négatifs sont nécessairement plus grands que 1 et les termes négatifs aussi car $8^2 - 8 = 56 > 1$ et $8^2 - 4(8) + 8 = 40 > 1$.

Comme n est différent de 0, alors $(n^2+8), (n^2+4n+8)$ et (n^2-4n+8) sont différents.

$(n^2 - 8)$ ne peut être égal à un des deux derniers facteurs. Vérifions.

$n^2 - 8 = n^2 + 4n + 8$ donnerait $n = -4$, ce qui est impossible car $n > 8$.
$n^2 - 8 = n^2 - 4n + 8$ donnerait $n = 4$, ce qui est impossible car $n > 8$.

Donc, il existe quatre entiers différents et supérieurs à 1 qui sont : (n^2-4n+8), (n^2-8), (n^2+8) et (n^2+4n+8) tels que leur produit donne M.