Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau collégial

Le jeudi 28 février 2013

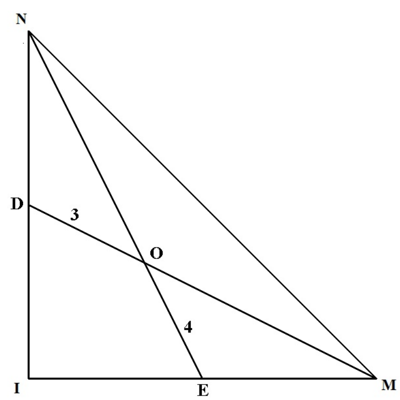
SOLUTIONNAIRE

---

1. Le triangle ennemi

Jacqueline se casse la tête avec un triangle NMI, rectangle en I, dont elle doit calculer l'aire. Sa seule information est que les médianes MD et NE se croisent en O de telle sorte que la longueur de OD est de 3 et celle de OE est de 4. Aidez-la à trouver l'aire de ce triangle.

Solution :



Le point de rencontre des médianes d'un triangle se situe au tiers de celles-ci, à partir du point milieu d'un côté. On sait donc que $\overline{OM}$ mesure 6 et que $\overline{ON}$ mesure 8.

À partir du triangle NIE, on obtient :

$m\overline{NI}^2 + m\overline{IE}^2 = 12^2$ (1)

De même, à partir du triangle MID, on a :

$m\overline{ID}^2 + m\overline{IM}^2 = 9^2$

$\Rightarrow (\frac{1}{2}m\overline{NI})^2 + (2m\overline{IE})^2 = 9^2$ (2)

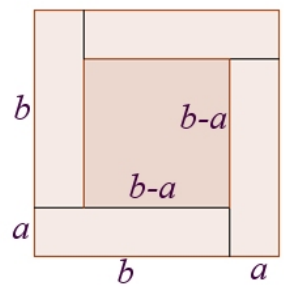
À partir des équations (1) et (2), on obtient facilement $m\overline{NI} = 2\sqrt{33}$ et $m\overline{IE} = 2\sqrt{3}$. Il suit que :

$Aire = \frac{b \times h}{2} = \frac{2m\overline{IE} \times m\overline{NI}}{2} = 12\sqrt{11}$

2. **Le résultat mystère**

Simon vous propose un jeu où vous choisissez au hasard deux nombres réels positifs. Il vous demande ensuite de calculer le carré de la somme des deux nombres et de diviser le tout par le produit des deux nombres. Il affirme alors que le résultat mystère que vous avez obtenu est plus grand ou égal à quatre. Montrer que Simon ne se trompera jamais avec cette affirmation.

Solution 1 :



On peut supposer, sans perte de généralité, que $b > a$.

Selon le dessin : $(a+b)^2 = 4ab + (b-a)^2$

En divisant par ab : $\frac{(a+b)^2}{ab} = 4 + \frac{(b-a)^2}{ab}$

Alors, comme le dernier terme est positif : $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$

Solution 2 :

Tout nombre carré étant positif : $(a-b)^2 \geq 0$

En développant : $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

En additionnant $4ab$: $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

En factorisant : $(a+b)^2 \geq 4ab$

En divisant par ab : $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$

Remarque : Il est aussi possible de démontrer le résultat en utilisant la dérivée.

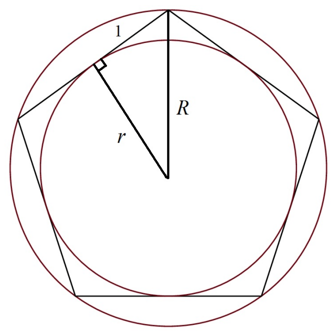
3. Un π coincé

Montrer que pour tous les polygones réguliers dont l'arête mesure 2 unités, l'aire de l'anneau délimité par le cercle circonscrit au polygone et le cercle inscrit dans le polygone sera toujours égale à π .

Solution :

Peu importe le nombre de côtés de la figure régulière, on peut toujours construire le triangle rectangle suivant où r est le rayon du cercle inscrit et R celui du cercle circonscrit (le petit côté du triangle étant la demi-longueur d'un côté du polygone).

Voici une illustration avec un pentagone régulier :



On a donc que $R^2 = r^2 + 1 \Rightarrow R^2 - r^2 = 1$

On cherche l'aire de l'anneau compris entre les deux cercles soit :

$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi * 1 = \pi$

4. Deux dragons qui font boom !

Dans un jeu vidéo, deux dragons magiques volent dans un espace en trois dimensions. $P_1(t)$ et $P_2(t)$ donnent les positions (x, y, z) des dragons au moment t, où t est en secondes.

$P_1(t) = \left(t8^t, 2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right), \left\lfloor t^3 - 4t^2 + 5t\right\rfloor\right)$ et $P_2(t) = \left(301 - t, \frac{17}{6} - t, t - \frac{1}{3}\right)$

Est-ce que les deux dragons entreront en collision ? Si oui, donner le nombre total de collisions et le moment t correspondant à chacune des collisions.

Remarque : $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Solution :

Soit (x, y, z) la position de la collision au temps t.

Selon la coordonnée en y il faut que $2\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{17}{6} - t$.

Or, l'image de la fonction $\sin(x)$ étant entre -1 et 1, l'image de la fonction $2\sin^2(x)$ sera entre 0 et 2.

Cela signifie que $\frac{17}{6} - t$ se situe entre 0 et 2 et ainsi toutes les valeurs possibles de t se retrouvent dans l'intervalle $\left[\frac{5}{6}, \frac{17}{6}\right]$.

Selon la coordonnée en z il faut que $t - \frac{1}{3}$ soit entier à cause de la partie entière dans P_2. Donc t est de la forme $\frac{3n+1}{3}$ pour un certain entier n.

Selon y et z, les seules valeurs de t possibles de la forme $\frac{3n+1}{3}$ dans l'intervalle $\left[\frac{5}{6}, \frac{17}{6}\right]$ sont $\frac{4}{3}$ et $\frac{7}{3}$.

Calculons donc les positions pour ces deux temps possibles :

$P_1\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\left(\frac{4}{3}\right)8^{\left(\frac{4}{3}\right)}, 2\sin^2\left(\frac{\pi\left(\frac{4}{3}\right)}{2}\right), \left\lfloor\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{4}{3}\right)\right\rfloor\right) = \left(\left(\frac{4}{3}\right)2^4, 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, \left\lfloor\frac{64}{27} - \frac{64}{9} + \frac{20}{3}\right\rfloor\right) = \left(\frac{64}{3}, \frac{3}{2}, 1\right)$

$[P_1\left(\frac{7}{3}\right) = \left(\left(\frac{7}{3}\right)8^{\left(\frac{7}{3}\right)}, 2\sin^2\left(\frac{\pi\left(\frac{7}{3}\right)}{2}\right), \left\lfloor\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{7}{3}\right)\right\rfloor\right) = \left(\left(\frac{7}{3}\right)2^7, 2\left(\frac{-1}{2}\right)^2, \left\lfloor\frac{343}{27} - \frac{196}{9} + \frac{35}{3}\right\rfloor\right) = \left(\frac{896}{3}, \frac{1}{2}, 2\right)$

$P_2\left(\frac{4}{3}\right) = \left(301 - \left(\frac{4}{3}\right), \frac{17}{6} - \left(\frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{899}{3}, \frac{3}{2}, 1\right)$

$P_2\left(\frac{7}{3}\right) = \left(301 - \left(\frac{7}{3}\right), \frac{17}{6} - \left(\frac{7}{3}\right), \left(\frac{7}{3}\right) - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{896}{3}, \frac{1}{2}, 2\right)$

Donc il n'y a qu'une seule intersection au moment $t = \frac{7}{3}$ secondes.

5. **Remonter à la racine du symbole**

Vous devez déchiffrer un code vous donnant la valeur du nombre Ξ vérifiant l'égalité

$$\Xi = \left|\sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right|$$

Les informations que vous avez pu accumuler vous ont permis de savoir que

$$\sqrt[3]{\Lambda} + \frac{1}{\sqrt[3]{\Lambda}} = 3$$

Quelle est donc la valeur du nombre Ξ ?

Solution :

Posons $a = \sqrt[3]{\Lambda}$ on sait alors que $a + \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow \frac{a^2+1}{a} = 3 \Rightarrow\ a^2 + 1 = 3a$

$\sqrt{\Lambda} = \left(\Lambda^{1/3}\right)^{3/2} = a^{3/2}$ donc

$$\left(\sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 = \left(a^{3/2} - \frac{1}{a^{3/2}}\right)^2 = \left(\frac{a^3-1}{a^{3/2}}\right)^2 = \frac{\left((a-1)\left(a^2+a+1\right)\right)^2}{a^3} = \frac{((a-1)(3a+a))^2}{a^3} = \frac{(a-1)^2 16a^2}{a^3}$$

$$= \frac{16\left(a^2-2a+1\right)}{a} = \frac{16(3a-2a)}{a} = 16$$

Donc si $\left(\sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = \pm 4$ et, finalement, $\Xi = \left|\sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\right| = 4$

6. **Les polynômes de l'année**

Un polynôme de l'année est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2013, dont le coefficient du terme avec le plus haut degré est 1 et dont tous les zéros sont entiers. Combien y a-t-il de polynômes de l'année dont le produit des zéros (distincts ou non) est 2013 ?

Solution :

La décomposition en facteurs premiers de 2013 est $3*11*61$. Un polynôme de degré $n \geq 3$ ayant 2013 comme produit des zéros sera donc de l'une des formes suivantes :

$p_1(x) = (x \pm 1)^{n-3}(x \pm 3)(x \pm 11)(x \pm 61)$
$p_2(x) = (x \pm 1)^{n-2}(x \pm 3*11)(x \pm 61)$
$p_3(x) = (x \pm 1)^{n-2}(x \pm 3*61)(x \pm 11)$
$p_4(x) = (x \pm 1)^{n-2}(x \pm 11*61)(x \pm 3)$
$p_5(x) = (x \pm 1)^{n-1}(x \pm 2013)$

Lorsqu'un polynôme contient m fois le terme $(x \pm 1)$, on peut choisir entre 0 et m termes comme étant $(x+1)$, les autres étant $(x-1)$, ce qui nous donne $(m+1)$ possibilités. Les termes suivants mènent chacun à 2 possibilités, $(x+r)$ et $(x-r)$, à l'exception du dernier dont le signe est fixé de façon à obtenir un produit positif des zéros.

On a donc :

Pour $p_1(x)$:$(n-3+1)*2*2*1 = 4n-8$ possibilités
Pour $p_2(x)$, $p_3(x)$ et $p_4(x)$:$(n-2+1)*2*1 = 2n-2$ possibilités
Pour $p_5(x)$:$(n-1+1)*1 = n$ possibilités

Au total, pour les polynômes de degré $n \leq 3$, on a donc :

$(4n-8)+3*(2n-2)+n = 11n-14 \quad$ possibilités

Pour les polynômes de degré 1, seule la forme $p_5(x)$ est valable, menant à la seule possibilité $(x-2013)$.

Pour les polynômes de degré 2, toutes les formes sauf $p_1(x)$ sont valides, menant à :

$3*(2n-2)+n = 7n-6 = 7*2-6 = 8$ possibilités

Le nombre de possibilités total, t, est donc :

$t = 1+8+\sum_{n=3}^{2013}(11n-14) = 9+11\sum_{n=3}^{2013} n - 14\sum_{n=3}^{2013} 1$

$= 9+11*(\sum_{n=1}^{2013} n - \sum_{n=1}^{2} n) - 14*2011$

$= 9+11*(\frac{2013*2014}{2} - \frac{2*3}{2}) - 14*2011$

$= 22269823$