Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau collégial

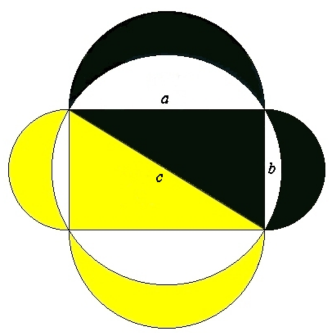
Le jeudi 9 février 2012

SOLUTIONNAIRE

---

1. Redorer son enseigne

Une compagnie veut se créer un nouveau logo très rutilant pour remplacer sa vieille enseigne extérieure. Celui-ci sera formé d'un rectangle d'or de 1 mètre par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mètre inscrit dans un cercle. De plus, chaque côté du rectangle sera le diamètre d'un demi-cercle qui sera rajouté au logo tel qu'illustré dans la figure. La compagnie veut plaquer le rectangle et les lunules (la partie ombragée) de son logo d'une mince couche d'or 24 carats. Sachant que l'or en feuille minces de 24 carats se vend 0,05$ du centimètre carré, combien en coûtera-t-il à la compagnie pour redorer son enseigne ?



Solution :

En séparant la figure en deux avec une diagonale du rectangle on obtient un triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle. Notons par a, b et c les côtés de ce triangle. L'aire des deux lunules associées sera égale à l'aire des deux demi-cercles ayant pour diamètres les côtés du rectangle moins la différence entre l'aire du triangle rectangle et celle du demi-cercle dans lequel il est inscrit.

L'aire d'un demi-cercle en fonction du diamètre est donnée par $\frac{\pi}{8} \cdot d^2$, on a donc que l'aire des deux lunules vaudra :

$$\frac{\pi}{8} \cdot a^2 + \frac{\pi}{8} \cdot b^2 - \left[\frac{\pi}{8} \cdot c^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\right] = \frac{\pi}{8} \cdot \left[a^2 + b^2 - c^2\right] + \frac{1}{2} \cdot ab$$

Le triangle étant rectangle, l'expression contenue à l'intérieur des derniers crochets vaudra 0 (pythagore) et l'aire des deux lunules est ainsi égale à $\frac{1}{2} \cdot ab$, soit $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

On réalise alors que cette aire est la même que celle du triangle rectangle, donc celle des quatres lunules est identique à celle du rectangle d'or, soit $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce qui donne $1 + \sqrt{5}$ pour la partie ombragée du logo.

Le coût sera donc de $\left(1 + \sqrt{5}\right) \cdot 0,05 \cdot 1000 = 500\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1618\$$.

2. La puce à remonter le temps

À minuit, une puce sur une horloge se situe dos à l'aiguille des heures et commence à courir à vitesse constante dans le sens inverse des aiguilles. À 8h, la puce diminue sa vitesse du quart, à 16h elle diminue encore sa vitesse, cette fois-ci du tiers. Exactement 24 heures après le début de sa course, la puce croise pour une 2012e fois l'aiguille des heures. À quelle position sur l'horloge était la puce à 10h du matin ? Dire sur quel numéro de l'horloge se trouve la puce ou donner la fraction du chemin qu'il lui reste à parcourir entre deux numéros consécutifs.

Solution :

Posons v, la vitesse en tours/heure de la puce pendant les 8 premières heures.
Ensuite elle va à une vitesse de $\frac{3}{4}v$.
À 16 h, elle diminue à nouveau sa vitesse du tiers qui devient alors $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} v = \frac{1}{2} v$.

La puce et l'aiguille se croisent à chaque fois que le somme de leur distance parcourue donne un tour.

La distance totale parcourue de la puce est $8v + 8 \cdot \frac{3}{4} v + 8 \cdot \frac{1}{2} v = 18v$.
La distance totale parcourue par l'aiguille est $24 \cdot \frac{1}{12} = 2$ tours.

La somme de ces deux distances donne donc le nombre total de croisements .
À partir de ce nombre, on peut isoler la vitesse initiale de la puce.

$18v + 2 = 2012$ donc $v = \frac{335}{3}$ tours/heure = 111 et $\frac{2}{3}$ tours/heure.

Après 8 heures, la puce a fait $8 \cdot \frac{335}{3} = 893$ tours et $\frac{1}{3}$ de tour.
Donc elle est sur le 8 (elle va dans le sens inverse des aiguilles $12 - \frac{12}{3} = 8$).

Pendant les deux prochaines heures, elle fait $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{335}{3}$ tours = $\frac{335}{2}$ tours donc 167 tours complets et un demi-tour.

Elle est donc sur la position du numéro 2 ($8 - \frac{12}{2}$).

3. Une question de concours... de circonstance

On vous demande de préparer une question pour un concours de mathématiques qui utilise la date du concours, soit le 9/2/12. Vous décidez d'employer une fraction continue où le jour et le mois seraient répétés de la façon suivante :

$$n = 9 + \frac{x}{2+\frac{x}{9+\frac{x}{2+\frac{x}{9+\ldots}}}}$$

Quelle valeur de x devez-vous utiliser pour que le résultat n corresponde au nombre 12 de l'année ?

Solution :

Comme la même fraction est répétée à l'infini, on peut établir les relations suivantes :

$$n = 9 + \frac{x}{2+\frac{x}{n}}$$

$$n = 9 + \frac{x}{\frac{2n+x}{n}}$$

$$n = 9 + \frac{nx}{2n+x}$$

$$n = \frac{18n+9x+nx}{2n+x}$$

$$2n^2 + nx = 18n + 9x + nx$$

$$2n^2 - 18n = 9x$$

$$x = \frac{2n(n-9)}{9}$$

Et en posant $n = 12$ on trouve $x = 8$.

N.B. : Évidemment, on aurait pu poser initialement que $n = 12$ ...
mais ce n'est pas la façon dont on construit une question de concours !

4. Les racines d'Olivier

Olivier s'amuse à trouver des polynômes $p(x)$, toujours à coefficients entiers, dont les racines (les zéros) sont des racines comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. Facile !
Question d'augmenter son défi, il décide ensuite d'en trouver un dont $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ serait une racine (c'est-à-dire que $p(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$). Il finit par en obtenir un qui, à sa grande surprise, est relativement simple. Trouver quel est ce polynôme à coefficients entiers.

Solution :

Pour que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ soit le zéro d'un polynôme, il faut que :

$$x - \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2+2\sqrt{6}+3$$

$$\Rightarrow x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \left(x^2-5\right)^2 = 24$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 25 = 24$$

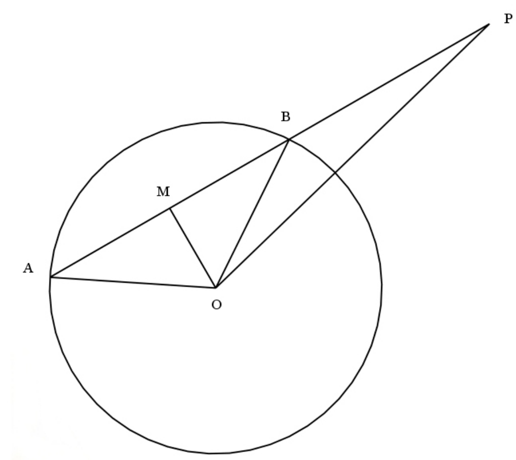
$$\Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

Donc, $p(x) = x^4-10x^2+1$ est un polynôme à coefficients entiers répondant au critère.
(ou tout multiple de ce polynôme)

5. **Avoir plusieurs cordes à son arc... de cercle**

Soit un cercle et un point P qui lui est extérieur. À partir de P on trace des droites qui, en traversant le cercle, définissent des cordes du cercle. Montrer que tous les points milieu de ces cordes sont situés sur un même cercle.

Solution :



Soit O le centre du cercle, A et B les points extrêmes d'une corde et M le point milieu de cette corde.

Le triangle AOB est isocèle car formé de deux rayons du cercle.

Donc sa médiane OM est confondue avec la hauteur issue de O ce qui veut dire que OM est perpendiculaire à AB.

Le triangle OMP est donc toujours rectangle.

Donc le triangle OMP est toujours inscriptible dans un demi-cercle de diamètre OP.

Conclusion : Le point M fera toujours partie du cercle de diamètre OP.

6. Les dés doublés

Jacques s'amuse avec de drôles de dés dont les faces opposées montrent un même chiffre : 1, 2 ou 3. Chacun de ces trois résultats est donc équiprobable. Il s'invente un jeu dont le but est d'obtenir le chiffre 3. Il commence par lancer un seul dé. Tant qu'il n'obtient aucun 3, il fait un nouveau lancer, mais lance cette fois un nombre de dés égal au plus grand chiffre obtenu lors du lancer précédent. En moyenne, combien de lancers seront nécessaires avant d'obtenir un 3 ?

Solution :

On pose que n_i est le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir 3 si on commence par lancer i dés. Comme on lance toujours 1 ou 2 dés (jamais 3), nos seules variables sont n_1 et n_2.

Quand on lance un seul dé :

Valeur du plus grand dé	Probabilité
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$

On effectue un lancer. On a la même chance d'obtenir 1, 2 ou 3. Si on obtient 1, on a effectué 1 lancer et on doit continuer le jeu en lançant 1 dé, ce qui nous demandera en moyenne n_1 lancers supplémentaires avant de rouler un 3. Si on obtient plutôt un 2, on a aussi effectué un lancer et on doit continuer le jeu en lançant 2 dés, ce qui nous demandera en moyenne n_2 lancers supplémentaires. Si on obtient 3, c'est le dernier lancer qu'on aura à faire.

Pour obtenir le nombre moyen de lancers nécessaires, on multiplie chacun des résultats par sa probabilité associée et on en fait la somme :

$$\begin{aligned} & n_1 = (1+n_1)\cdot\tfrac{1}{3} + (1+n_2)\cdot\tfrac{1}{3} + 1\cdot\tfrac{1}{3} \\ \Rightarrow\quad & n_1 = 1 + \tfrac{1}{3}n_1 + \tfrac{1}{3}n_2 \\ \Rightarrow\quad & 2n_1 - n_2 = 3 \qquad (1) \end{aligned}$$

Quand on lance deux dés :

Valeur du plus grand dé	Probabilité	
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$	(il faut avoir 1 et 1)
3	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$	(1 - la probabilité de n'avoir jamais 3)
2	$1-\left(\frac{1}{9}+\frac{5}{9}\right) = \frac{1}{3}$	(probabilité complémentaire)

Par la même logique que lorsqu'on lance un dé, on obtient :

$$\begin{aligned} & n_2 = (1+n_1)\cdot\tfrac{1}{9} + (1+n_2)\cdot\tfrac{1}{3} + 1\cdot\tfrac{5}{9} \\ \Rightarrow\quad & n_2 = 1 + \tfrac{1}{9}n_1 + \tfrac{1}{3}n_2 \\ \Rightarrow\quad & -n_1 + 6n_2 = 9 \qquad (2) \end{aligned}$$

On a un système de 2 équations, 2 inconnues qui donne comme solution $n_1 = \frac{27}{11}$.