Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau collégial

Le vendredi 11 février 2011

SOLUTIONNAIRE

---

1. La suite de nombres titanesques

Soit la suite de nombres définie récursivement pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$a_0 = 10$
$a_n = 10(a_{n-1})^{10}$ pour $n \geq 1$

Pour $n = 2011$, on obtient un nombre d'une taille époustouflante. Si on calcule le logarithme en base 10 de ce nombre, quelle est la somme de tous les chiffres qui le composent ?

Solution :

On écrit les premiers termes de la suite pour chercher une structure

$a_0 = 10$

$a_1 = 10(10)^{10} = 10^{11}$

$a_2 = 10(10^{11})^{10} = 10(10)^{110} = 10^{111}$

$a_3 = 10(10^{111})^{10} = 10(10)^{1110} = 10^{1111}$ etc...

On peut en déduire assez rapidement que $a_n = 10^{111\ldots 1}$ où le nombre de 1 est $n+1$.

On a donc que

$\log_{10}(a_{2011}) = \log_{10}(10^{111\ldots 1}) = (111\ldots 1) \cdot \log_{10}(10) = (111\ldots 1) \cdot 1 = 111\ldots 1$

La nombre obtenu est donc formé d'une séquence de $n+1 = 2012$ fois le chiffre 1

(c'est un nombre monstrueusement titanesque) dont la somme des chiffres donne,

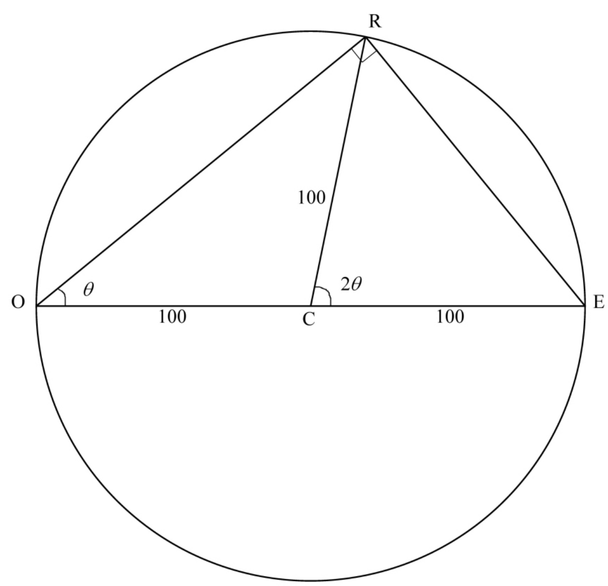
évidemment, 2012.

2. Le message va droit au but

Émilie court le long d'une piste circulaire d'un rayon de 100 mètres. Olivier a un message urgent à lui donner et arrive à la piste au moment précis où elle est diamétralement opposée à lui, mais elle ne le remarque pas et continue sur sa trajectoire. Si Olivier court à la même vitesse qu'Émilie et se permet d'aller en ligne droite dans la direction qu'il veut sans suivre la piste, montrez que l'angle θ (mesuré, en radians, par rapport au diamètre qui les sépare initialement) qu'il doit choisir pour rejoindre le plus vite possible Émilie est tel que : $\theta = \cos(\theta)$

Solution :

Olivier devra choisir un angle lui permettant d'arriver simultanément avec Émilie au point de rencontre sur la piste et comme ils courent à la même vitesse, ils auront alors parcouru la même distance.



Soit R le point de rencontre, O et E les positions initiales d'Olivier et d'Émilie et C le centre de la piste circulaire. Le triangle ORE est rectangle car il est inscrit dans un demi-cercle. L'angle $\angle$REO est donc de $\frac{\pi}{2} - \theta$. Comme le triangle ECR est isocèle, l'angle $\angle$CRE est donc aussi de $\frac{\pi}{2} - \theta$. On en déduit que l'angle $\angle$RCE est de 2θ.

Le cercle ayant un rayon de 100 mètres, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{ER}$, en radians, est égale au rayon multiplié par l'angle, soit $100 \cdot 2\theta = 200\theta$ rad.

Du triangle rectangle, on tire que $\cos(\theta) = m\overline{OR}/200$ et que la longueur du segment $\overline{OR}$ vaut donc $200\cos(\theta)$.

Comme il faut que la longueur de l'arc de cercle $\widehat{ER}$ soit égale à la longueur du segment $\overline{OR}$ on obtient que $200\theta = 200\cos(\theta)$, ce qui implique que $\theta = \cos(\theta)$.

3. Une formule très générale

Considérons la dérivée de u^v (où l'on supposera u toujours positif).

Si u est une fonction de x et v une constante, on obtient comme dérivée $v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$

Si v est une fonction de x et u une constante, on obtient comme dérivée $u^v \cdot \ln(u) \cdot \frac{dv}{dx}$

Montrer que si u et v sont toutes les deux des fonctions de x, la dérivée de u^v est la somme des deux dérivées précédentes.

Solution :

Pour dériver une forme u^v où u et v sont des fonctions, il faut utiliser la dérivation logarithmique. Posons $y = u^v$, puis prenons le logarithme (naturel !) des deux côtés

$$\ln(y) = \ln(u^v) = v \cdot \ln(u) \quad \text{(propriété des logaritmes)}$$

On dérive ensuite implicitement par rapport à x des deux côtés de l'égalité

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

On isole la dérivée cherchée

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \left[\frac{dv}{dx} \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \right]$$

Finalement, on ramène le tout en terme des fonctions initiales

$$\frac{dy}{dx} = u^v \cdot \left[\frac{dv}{dx} \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = u^v \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \ln(u) + v \cdot \frac{u^v}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = u^v \cdot \ln(u) \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

□

4. Le triangle de Pascale

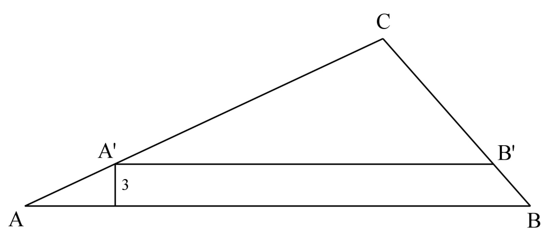
Pascale a un objet triangulaire (triangle scalène ABC) en plastique translucide d'une épaisseur uniforme de 5 mm et contenant un liquide coloré. Lorsqu'elle place la base AB de 36 cm à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur de 3 cm. Lorsqu'elle place la base BC de cet objet à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur égale au 1/4 de la hauteur issue du sommet A du triangle. En plaçant l'objet triangulaire sur la base CA, la hauteur du liquide est de 4 cm. Quelle est la longueur de la base CA ?

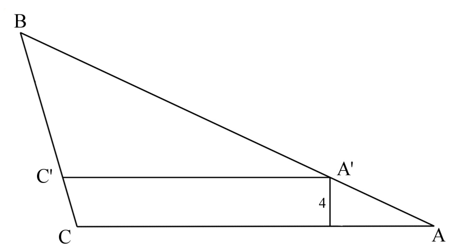
Solution :

L'épaisseur de l'objet étant uniforme, on peut ne considérer que la surface d'une face de l'objet. Sachant que lorsqu'elle place la base BC de cet objet à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur égale au 1/4 de la hauteur issue du sommet A, alors la hauteur du triangle rempli d'air est le trois quarts de la hauteur du grand triangle (l'objet triangulaire). Si le triangle est placé sur une autre base, le rapport des surfaces des triangles semblables, soit le triangle d'air et le grand triangle est constant, car les surfaces ne changent jamais. Donc le rapport des segments est aussi constant (étant la racine carrée des rapports des surfaces).

Bref, lorsque la base AB de cet objet est à l'horizontale, la hauteur du triangle d'air est 3/4 de la hauteur issue du sommet C du grand triangle. Le rapport est le même pour les bases des triangles.

Calculons l'aire du liquide à partir de la formule d'aire d'un trapèze.





Aire du liquide = $\frac{(m\overline{AB}+m\overline{A'B'})\cdot h}{2} = \frac{(36+\frac{3}{4}\cdot 36)\cdot 3}{2} = \frac{189}{2}$ cm^2

On trouve la mesure du 3^e côté à partir de l'aire du liquide.

$\frac{189}{2} = \frac{(m\overline{CA}+m\overline{C'A'})\cdot h}{2} = \frac{(m\overline{CA}+\frac{3}{4}\cdot m\overline{CA})\cdot 4}{2} \Rightarrow m\overline{CA} = 27$ cm

5. **L'exception qui contredit la règle**

Simon montre à Caroline la formule $f(n) = n^4 - 80n^2 + 100$ où $n \in \mathbb{N}$ en lui affirmant : «Je suis certain que la valeur absolue d'un nombre obtenu par cette formule ne peut jamais être un nombre premier». Caroline, qui prend un malin plaisir à le contredire, se dit qu'il doit bien exister au moins une valeur de n qui génère un nombre premier. Prouvez qu'elle a raison, mais qu'une telle valeur est unique.

Solution :

Un nombre premier ne se divise que par 1 et lui-même. On doit donc essayer de factoriser $f(n)$ pour voir quelles restrictions sur les facteurs pourraient en faire un nombre premier. Procédons par complétion du carré

$$\left|f(n)\right| = \left|n^4 - 80n^2 + 100\right| = \left|n^4 + 20n^2 + 100 - 100n^2\right| = \left|(n^2+10)^2 - 100n^2\right|$$

On se retouve alors en présence d'une différence de carrés qui se factorise par

$$\left|f(n)\right| = \left|[(n^2+10) - 10n] \cdot\ [(n^2+10) + 10n]\right| = \left|(n^2 - 10n + 10) \cdot\ (n^2 + 10n + 10)\right|$$

Comme $n^2 + 10n + 10 > 1$, la seule façon que $\left|f(n)\right|$ puisse être un nombre

premier est que l'autre facteur, $n^2 - 10n + 10$, soit égal à 1 ou -1.

Si $n^2 - 10n + 10 = -1 \Rightarrow n^2 - 10n + 11 = 0$
et il n'y a pas de solution entière ($\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ est irrationnel)

Si $n^2 - 10n + 10 = 1 \Rightarrow n^2 - 10n + 9 = 0 \Rightarrow (n-1) \cdot (n-9) = 0$
et les deux seules possibilités sont donc $n = 1$ et $n = 9$

Si $n = 1$, l'autre facteur $n^2 + 10n + 10 = 21$ qui n'est pas un nombre premier

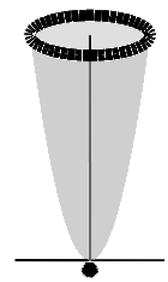
Si $n = 9$, l'autre facteur $n^2 + 10n + 10 = 181$ qui est bien un nombre premier
(on peut vérifier qu'il ne se divise par aucun entier de 2 à 13)

Il n'y a donc que la valeur $\left|f(9)\right| = |181| = 181$ qui soit un nombre premier.

6. Une bonne colle pour le grand Merlin

Lors d'un de ses nombreux tour de magie, le grand Merlin le magicien empile verticalement des boules rigides de différents rayons l'une par-dessus l'autre et ensuite il les cache complètement à l'aide de son fameux chapeau magique. Puis, lorsqu'il soulève son chapeau, il n'y a plus de boules. MAGIE!!!

Le truc : la partie creuse de son chapeau est un paraboloïde construit à partir de la révolution de la parabole $y = x^2$ autour de l'axe des y et dont la surface intérieure est collante. Les deux axes sont gradués en *talons* (unité de longueur dans le monde de la magie). Les boules sont des sphères toutes empilées pour que leurs centres soient sur l'axe central du paraboloïde tout en étant tangentes à la surface du paraboloïde, ce qui leur permet d'y coller.

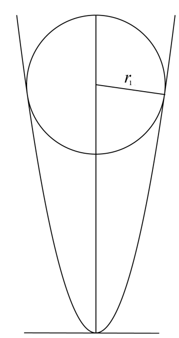


Si la hauteur intérieure de son chapeau est de 16 *talons*, quel est le nombre maximal de boules que le grand Merlin peut faire disparaître ?

Solution 1 :

La solution se fait en deux dimensions, avec les axes x et y. Le chapeau devient la parabole $y = x^2$ et les boules deviennent des cercles.

Soit r_1, le rayon du plus grand cercle C_1.
Le centre de C_1 se situe $(0, 16 - r_1)$.
On cherche r_1 pour que ce cercle soit tangent à la parabole.
$x^2 + (y - 16 + r_1)^2 = r_1^2$ et $y = x^2$ alors
$y + y^2 + 256 + r_1^2 - 32y + 2yr_1 - 32r_1 = r_1^2$
ce qui est équivalent à $y^2 + y(2r_1 - 31) + (256 - 32r_1) = 0$



C'est une équation quadratique
qui a zéro, une ou deux solutions. Il n'y en aura qu'une seule si le cercle est tangent à la parabole. Donc le discriminant de cette équation du deuxième degré doit être égal à 0.

$0 = b^2 - 4ac = (2r_1 - 31)^2 - 4(1)(256 - 32r_1) = 4r_1^2 + 4r_1 - 63$
On obtient encore une équation du deuxième degré en fonction de r_1.

$0 = (2r_1 - 7)(2r_1 + 9)$ donc $r_1 = \frac{7}{2}$ ou $r_1 = -\frac{9}{2}$ (à éliminer).
Donc C_1 a un diamètre de 7 cm.

On recommence avec le cercle C_2 dont le rayon est r_2 et le centre est $(0, 9 - r_2)$.
On cherche r_2 pour que ce cercle soit tangent à la parabole.

$x^2 + (y - 9 + r_2)^2 = r_2^2$ et $y = x^2$ alors $y + y^2 + 81 + r_2^2 - 18y + 2yr_2 - 18r_2 = r_2^2$ ce qui est équivalent à $y^2 + y(2r_2 - 17) + (81 - 18r_2) = 0$

Encore une fois, le discriminant de cette équation du second degré doit être égal à 0.
$0 = b^2 - 4ac = (2r_2 - 17)^2 - 4(1)(81 - 18r_2) = 4r_2^2 + 4r_2 - 35$

On obtient encore une équation du deuxième degré en fonction de r_2.
$0 = (2r_2 - 5)(2r_2 + 7)$ donc $r_2 = \frac{5}{2}$ ou $r_2 = -\frac{7}{2}$ (à éliminer).

On recommence avec le cercle C_3 dont le rayon est r_3 et le centre est $(0, 4 - r_3)$.
On cherche r_3 pour que ce cercle soit tangent à la parabole.

$x^2 + (y - 4 + r_3)^2 = r_3^2$ et $y = x^2$ alors $y + y^2 + 16 + r_3^2 - 8y + 2yr_3 - 8r_3 = r_3^2$ ce qui est équivalent à $y^2 + y(2r_3 - 7) + (16 - 8r_3) = 0$

Encore une fois, le discriminant de cette équation du second degré doit être égal à 0.
$0 = b^2 - 4ac = (2r_3 - 7)^2 - 4(1)(16 - 18r_3) = 4r_3^2 + 4r_3 - 15$
On obtient encore une équation du deuxième degré en fonction de r_3.

$0 = (2r_3 - 3)(2r_3 + 5)$ donc $r_3 = \frac{3}{2}$ ou $r_3 = -\frac{5}{2}$ (à éliminer).

On recommence avec le cercle C_4 dont le rayon est r_4 et le centre est $(0, 1 - r_4)$.
On cherche r_4 pour que ce cercle soit tangent à la parabole.

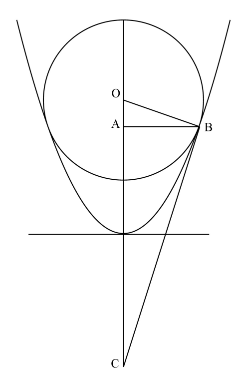
$x^2 + (y - 1 + r_4)^2 = r_4^2$ et $y = x^2$ alors $y + y^2 + 1 + r_4^2 - 2y + 2yr_4 - 2r_4 = r_4^2$ ce qui est équivalent à $y^2 + y(2r_4 - 1) + (1 - 2r_4) = 0$

Encore une fois, le discriminant de cette équation du second degré doit être égal à 0.
$0 = b^2 - 4ac = (2r_4 - 1)^2 - 4(1)(1 - 2r_4) = 4r_4^2 + 4r_4 - 3$
On obtient encore une équation du deuxième degré en fonction de r_4.

$0 = (2r_4 - 1)(2r_4 + 3)$ donc $r_4 = \frac{1}{2}$ ou $r_4 = -\frac{3}{2}$ (à éliminer).

Le diamètre du quatrième cercle est 1, alors le cercle est tangent au sommet de la parabole (un seul point de tangence). Donc, il est impossible de mettre plus de 4 cercles dans la parabole. Bref, le nombre maximum de boules que Merlin peut faire disparaître est 4.

Solution 2 :



Soit O, le centre d'un cercle tangent à la parabole, B le point de tangence (d'un côté), A la projection orthogonale de B sur l'axe des y et C l'intersection de la tangente du cercle au point B avec l'axe des y. BC est aussi tangent à la parabole, donc sa pente est de $2x$, ce qui place le point C comme le symétrique du point A.

Le triangle CBO est rectangle en B (propriété de la tangente). L'angle $\angle$OBA est égal à l'angle $\angle$BCA qui valent tous les deux le complément de l'angle $\angle$AOB. Les deux triangles ont deux angles identiques, donc ils sont semblables. Par le rapport des côtés de triangles semblables, on obtient :

$$\frac{m\overline{AO}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}} \quad (1)$$

B est sur la parabole $y = x^2$. Donc si $m\overline{AB} = x$, alors la position du point A est $(0, x^2)$ et celle du point C est $(0, -x^2)$ et $m\overline{AC} = 2x^2$.
En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient $\frac{m\overline{AO}}{x} = \frac{x}{2x^2}$
Donc $m\overline{AO} = \frac{1}{2}$.
Ceci est vrai peu importe la hauteur du cercle dans la parabole.

On doit maintenant essayer de placer des cercles dans la parabole en restreignant l'image de la parabole à l'intervalle $[0, 16]$. Soit h_1, la distance entre le bas du plus grand cercle et l'origine, r_1 le rayon du plus grand cercle et x_1 la longueur de AB du plus grand cercle.

Sur l'axe des y, on a $16 = h_1 + 2r_1$ (2)

De plus $(x_1, h_1 + r_1 - \frac{1}{2})$ étant sur la parabole, alors on a que $h_1 + r_1 - \frac{1}{2} = x_1^2$ (3)

Par le triangle rectangle OAB, on a que $x_1^2 = r_1^2 - (\frac{1}{2})^2$ (4)

En comparant les équations (3) et (4), on obtient $h_1 + r_1 - \frac{1}{2} = r_1^2 - \frac{1}{4}$ ce qui est équivalent à $0 = r_1^2 - r_1 + \frac{1}{4} - h_1$ (5)

En substituant h_1 de l'équation (2) dans l'équation (5), on obtient
$0 = r_1^2 - r_1 + \frac{1}{4} - 16 + 2r_1 = r_1^2 + r_1 - \frac{63}{4}$

On trouve donc deux valeurs de r_1 : $\frac{7}{2}$ ou $-\frac{9}{2}$, on élimine la valeur négative. Donc le plus grand cercle a un rayon de 7 *talons*. De plus cela donne une valeur de $h_1 = 9$.

On cherche maintenant le rayon du deuxième cercle en remplaçant la hauteur maximale de 16 par 9. Donc l'équation (2) pour le deuxième cercle s'ajuste en soustrayant le diamètre du cercle précédent ce qui donne $9 = h_2 + 2r_2$.

L'équation (5) se généralise peu importe le cercle, on a donc $0 = r_2^2 - r_2 + \frac{1}{4} - h_2$
En substituant h_2 on obtient $0 = r_2^2 - r_2 + \frac{1}{4} - 9 + 2r_2 = r_2^2 + r_2 - \frac{35}{4}$

On trouve donc deux valeurs de r_2 : $\frac{5}{2}$ ou $-\frac{7}{2}$, on élimine la valeur négative. Donc le second cercle a un rayon de 5 *talons* pour une distance à l'origine de $h_2 = 4$.

On recommence avec les équations $0 = r_3^2 - r_3 + \frac{1}{4} - h_3$ et $4 = h_3 + 2r_3$
En substituant h_3 on obtient $0 = r_3^2 - r_3 + \frac{1}{4} - 4 + 2r_3 = r_3^2 + r_3 - \frac{15}{4}$

On trouve donc deux valeurs de r_3 : $\frac{3}{2}$ ou $-\frac{5}{2}$, on élimine la valeur négative. Donc le troisième cercle a un rayon de 3 *talons* pour une distance à l'origine de $h_3 = 1$.

On recommence avec les équations $0 = r_4^2 - r_4 + \frac{1}{4} - h_4$ et $1 = h_4 + 2r_4$
En substituant h_4 on obtient $0 = r_4^2 - r_4 + \frac{1}{4} - 1 + 2r_4 = r_4^2 + r_4 - \frac{3}{4}$

On trouve donc deux valeurs de r_4 : $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{3}{2}$, on élimine la valeur négative. Donc le quatrième cercle a un rayon de 1 *talon* pour une distance à l'origine de $h_4 = 0$

Donc, il est impossible de mettre plus de 4 cercles dans la parabole. Bref, le nombre maximal de boules que Merlin peut faire disparaître est 4.