Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau collégial

Le vendredi 12 février 2010

SOLUTIONNAIRE

---

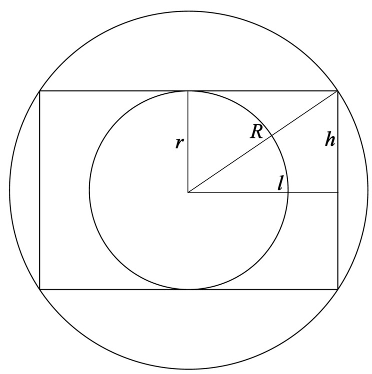
1. La pièce de monnaie Gaussienne

La République de Mathématique a décidé de faire une pièce de monnaie commémorative dont le côté face représente Gauss dans un cercle inscrit dans un rectangle, lui-même inscrit dans un plus grand cercle de rayon R. Exprimer le périmètre du rectangle en fonction de R, si l'aire en gris à l'extérieur du petit cercle représente une fraction $f = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} - 1$ de l'aire de ce petit cercle contenant Gauss.

Solution :

Soit :

l : la demi-largeur du rectangle
h : la demi-hauteur du rectangle
r : le rayon du petit cercle



On sait que $l^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow l = \sqrt{R^2 - h^2}$

et que $r = h$

On veut avoir $(2l)(2h) - \pi r^2 = f\pi h^2$

$$\Rightarrow 4\text{h}\sqrt{R^2 - h^2} - \pi h^2 = (\tfrac{4\sqrt{3}}{\pi} - 1)\pi h^2$$

$$\Rightarrow 4\text{h}\sqrt{R^2 - h^2} = (\tfrac{4\sqrt{3}}{\pi})\pi h^2 = 4\sqrt{3}h^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{3}h \Rightarrow \; R^2 - h^2 = 3h^2$$

$$\Rightarrow \; 4h^2 = R^2 \Rightarrow \; h = \tfrac{R}{2}$$

alors $l = \sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

et le périmètre est $p = 4h + 4l = 2R + 2\sqrt{3}R = 2R(1 + \sqrt{3})$

2. Le polynôme récursif

On dit que $q(x)$ est le polynôme récursif de $p(x)$ si $q(x) = p(p(x))$. Trouver tous les polynômes possibles de la forme $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 13$ qui soient le polynôme récursif d'un polynôme $p(x)$ à coefficients entiers.

Solution :

Comme $q(x)$ est un polynôme de degré 4, $p(x)$ doit être un polynôme de degré 2 pour que sa composition avec lui-même donne $q(x)$.

Posons $p(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Alors $q(x) = p(p(x)) = A(Ax^2 + Bx + C)^2 + B(Ax^2 + Bx + C) + C$

$q(x) = A^3x^4 + 2A^2Bx^3 + (AB^2 + 2A^2C + AB)x^2 + (2ABC + B^2)x + AC^2 + BC + C$

Donc $A^3 = 1$ et $A = 1$. En substituant A par 1, on obtient

$q(x) = x^4 + 2Bx^3 + (B^2 + 2C + B)x^2 + (2BC + B^2)x + C^2 + BC + C$

Comme l'élément constant doit donner 13 on a que $C(C + B + 1) = 13$. Ce nombre étant premier, ses seuls facteurs sont 1 et 13 ce qui ne donne que 4 combinaisons de possibilités pour les valeurs de B et C :

$C = 1, B = 11$ ou $C = 13, B = -13$ ou $C = -1, B = -13$ ou $C = -13, B = 11$

Les polynômes $q(x)$ possibles sont alors :

$q(x) = x^4 + 22x^3 + 134x^2 + 143x + 13$
$q(x) = x^4 - 26x^3 + 182x^2 - 169x + 13$
$q(x) = x^4 - 26x^3 + 154x^2 + 195x + 13$
$q(x) = x^4 + 22x^3 + 106x^2 - 165x + 13$

3. **Les minutes sont comptées**

Pour le mois de février 2010, un fournisseur d'accès de téléphonie cellulaire décide d'organiser le tirage d'un certain nombre de minutes de temps d'appel. L'octroi des minutes se fera selon le tordu principe suivant. À chaque jour du mois de février le récipiendaire obtiendra un nombre de minutes décroissant représentant une fraction de 2010. Le premier jour, un lot de 2010 minutes sera divisé en 2, puis ensuite en 3 et le nombre de minutes résultantes sera octroyé. Le second jour, les 2010 minutes seront divisées en 3, puis en 4 et le résultat sera octroyé. Le troisième jour, 2010 sera divisé en 4 puis en 5 et le résultat sera octroyé. Et ainsi de suite jusqu'à la fin du mois. Calculer le nombre total de minutes auquel correspond ce prix en supposant que les minutes sont comptabilisées sans perte de précision.

Solution :

Pour la n-ième journée du mois, le nombre de minutes correspond à $\frac{2010}{(n+1)(n+2)}$.

On doit donc faire la somme de $\frac{2010}{2\cdot 3}+\frac{2010}{3\cdot 4}+\frac{2010}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{2010}{29\cdot 30}$

(il y a 28 jours en février 2010... ce n'est pas une année bissextile !)

en mettant 2010 en évidence on obtient $2010\left[\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{29\cdot 30}\right]$

Il faut alors remarquer qu'on peut écrire une fraction telle $\frac{1}{2\cdot 3}$ sous la forme :

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 3}$ (décomposition en fractions partielles)

De façon générale, on a que $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

La somme vaut donc $2010\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{29}-\frac{1}{30})\right]$

Tous les termes intermédiaires du crochet s'annulent donc et il ne reste alors que le premier et le dernier, ce qui donne :

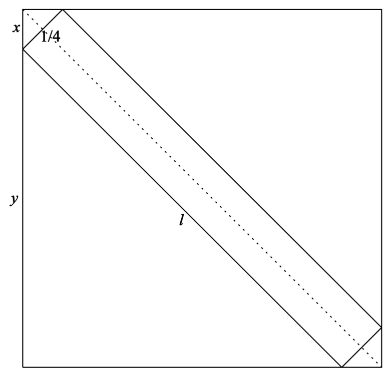
$2010\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{30})\right]=2010\cdot\frac{7}{15}=938$ minutes.

4. Le carré de la balançoire

Dans un parc, un carré de côté $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ m est réservé pour l'aménagement d'une balançoire à bascule rudimentaire. Celle-ci sera construite à l'aide d'une planche de 0,25 m de large, la plus longue possible, dont le centre sera posé sur un billot de $4-2\sqrt{3}$ m de diamètre. Après avoir identifié la région du carré à utiliser, les constructeurs ont installé la planche et se sont rendu compte que quand elle touche au sol, d'un côté ou de l'autre, elle passe toujours par un même point P dont la distance avec le sol est de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m. Dans ce contexte, calculer la longueur de la planche sachant que l'extrémité de celle-ci doit être entièrement dans le carré au moment de son contact avec le sol.

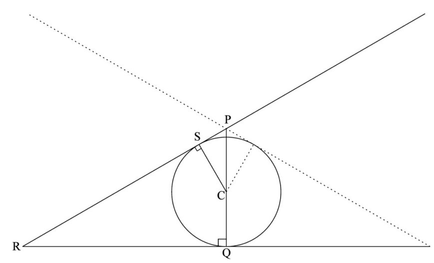
Solution :

On Commence par identifier la région à utiliser dans le carré. La plus grande longueur dans un carré étant selon sa diagonale, on aura la plus longue planche possible si on la centre le long de cette diagonale. Soit x le côté du triangle rectangle isocèle formé par la planche et le coin supérieur, y le côté du triangle rectangle isocèle formé par le coin inférieur et l la longueur maximale utilisable dans le carré.



On a $x^2+x^2=(1/4)^2$ d'où l'on tire $x=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$. Comme le côté $x+y=\frac{9\sqrt{2}}{8}$ on en déduit que $y=\sqrt{2}$. Finalement comme $l^2=y^2+y^2$ on obtient que $l=2$ m.

Si on regarde maintenant la balançoire de côté on a que RQ est la demi-longueur au sol, donc vaut 1. Le sol et la planche étant tangents au cercle, la longueur RS vaut également 1. La longueur maximale de la planche correspondra donc à la longueur au sol plus un arc de cercle allant du point S à l'autre point de tangence de la planche. On doit donc trouver l'angle au centre de cet arc de cercle.



Connaissant $\overline{RQ}=1$ et $\overline{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et en appliquant le théorème de Pythagore, on trouve que $\overline{RP}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Cette valeur étant le double de la longueur PQ, on en déduit que l'angle $\angle PRQ$ vaut 30°.

Le triangle SCP étant semblable au triangle PRQ (angles égaux), l'angle $\angle SCP$ vaut aussi 30°. L'angle au centre cherché est donc de 60° et l'arc de cercle correspond alors à 1/6 de la circonférence du cercle. Le rayon de celui-ci étant de $\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=(2-\sqrt{3})$ on obtient $\frac{1}{6}\cdot 2\pi r=\frac{\pi(2-\sqrt{3})}{3}$.

La longueur de la planche étant celle au sol plus celle de l'arc de cercle, elle correspond donc à $2+\frac{\pi(2-\sqrt{3})}{3}$ m.

5. **Le générateur de nombres**

Un programme génère des nombres aléatoires entre 0 et 1. Le programme est conçu de telle sorte que pour tout x de 0 à 1, la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que x est trois fois plus grande que celle qu'il génère un nombre plus petit que $\frac{x}{4}$. De plus, la probabilité qu'il génère un nombre plus grand ou égal à x est identique à la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $(1-x)$. Calculer la probabilité que ce programme nous donne un nombre plus petit que $\frac{1}{21}$.

Solution :

Soit $P(x)$ la probabilité que le programme génère un nombre plus petit que x $(0 < \text{nombre} < x)$. La probabilité que le programme génère un nombre plus grand ou égal à x $(x \leq \text{nombre} < 1)$ étant complémentaire à la première probabilité, leur somme donne 1. Comme cette dernière probabilité est identique à celle que le nombre soit plus petit que $1-x$, on obtient donc que $P(x)+P(1-x)=1$.

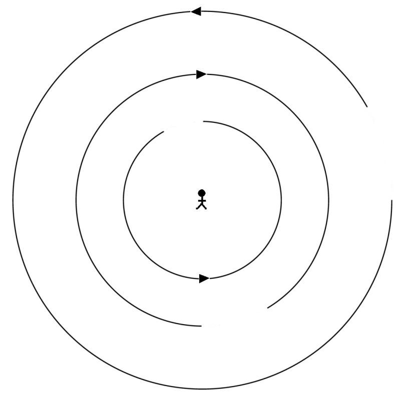
De plus, on sait que $P(x) = 3P(\frac{x}{4})$. On peut alors établir les égalités suivantes :

$P(\frac{1}{21}) = 1 - P(\frac{20}{21})$
$P(\frac{1}{21}) = 1 - 3P(\frac{5}{21})$
$P(\frac{1}{21}) = 1 - 3[1 - P(\frac{16}{21})]$
$P(\frac{1}{21}) = 1 - 3[1 - 3P(\frac{4}{21})]$
$P(\frac{1}{21}) = 1 - 3[1 - 3 \cdot 3P(\frac{1}{21})] = 1 - 3 + 27P(\frac{1}{21})$

On en tire que $26P(\frac{1}{21}) = 2$ et donc que $P(\frac{1}{21}) = \frac{1}{13}$.

6. Ariane cherche le fil

Ariane, qui est d'une taille négligeable, se trouve dans le noir au centre d'un labyrinthe composé de 3 cercles troués qui se mettront bientôt à tourner en émettant un signal sonore. Les cercles ont des rayons de 50, 80 et 120 mètres et leurs portes de sortie débutent aux angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ et 0 radians, respectivement, et se terminent toutes $\frac{\pi}{6}$ radian plus loin dans le sens anti-horaire. Le cercle de rayon 80 tournera dans le sens horaire tandis que les deux autres tourneront dans le sens contraire. Les deux plus petits cercles mettront 50 secondes à faire un tour tandis que le plus grand en mettra 100. Sachant qu'Ariane marchera de façon rectiligne, sans changement de direction, à une vitesse d'un demi-mètre par seconde, indiquez-lui combien de temps après le signal elle doit partir et dans quelle direction elle doit marcher afin d'en sortir le plus rapidement possible.



Solution :

Pour chacun des cercles l'angle du début de la porte de sortie, t secondes après le début des rotations, est donné par : $\theta_{50} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{50}t, \quad \theta_{80} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{50}t, \quad \theta_{120} = \frac{2\pi}{100}t$

Le temps nécessaire à Ariane pour se rendre aux trois cercles est de respectivement 100, 160 et 240 secondes. Si t correspond au moment où Ariane se met à marcher, l'angle du début des portes des cercles au moment où elle les rejoint est :

$$\theta_{50} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{50}(t+100) = \frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{25}t \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{25}t$$

$$\theta_{80} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{50}(t+160) = -\frac{49\pi}{10} - \frac{\pi}{25}t \equiv \frac{11\pi}{10} - \frac{\pi}{25}t$$

$$\theta_{120} = \frac{2\pi}{100}(t+240) = \frac{24\pi}{5} + \frac{\pi}{50}t \equiv \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{50}t$$

Le cercle de rayon 50 rattrapera celui de rayon 120 lorsque :

$$\theta_{50} = \theta_{120} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{25}t = \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{50}t \;\Rightarrow\; t = \frac{20}{3}\text{ s}$$

L'angle est alors : $\theta_{120} = \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{50} \cdot \frac{20}{3} = \frac{14\pi}{15}$

À ce moment, le cercle du milieu en est à : $\theta_{80} = \frac{11\pi}{10} - \frac{\pi}{25} \cdot \frac{20}{3} = \frac{5\pi}{6}$

Il couvre donc l'intervalle $[\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}] = [\frac{5\pi}{6}, \pi]$

Or, $\frac{5\pi}{6} \leq \frac{14\pi}{15} \leq \pi$. Le cercle du milieu est donc bien placé !

Ariane doit donc partir au temps $t = \frac{20}{3}$ s dans la direction $\frac{14\pi}{15}$.