Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau collégial

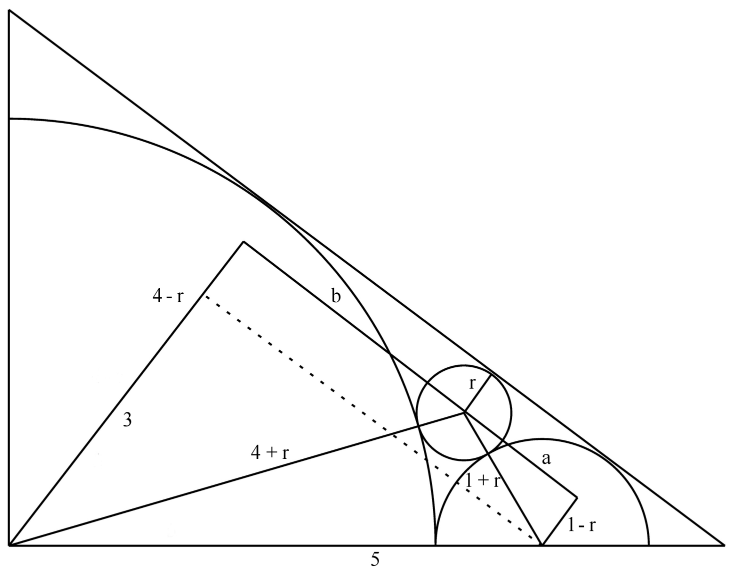
Le vendredi 13 février 2009

SOLUTIONNAIRE

---

1. Un quart, un demi et un complet

À l'intérieur d'un triangle rectangle, on retrouve un quart de cercle de rayon 4, un demi-cercle de rayon 1 et un petit cercle. Les portions de cercles sont tangentes entre elles et tangentes à l'hypoténuse du triangle tel qu'illustré sur la figure ci-contre. Trouver le rayon du plus petit cercle.



Solution :

Les rayons étant perpendiculaires aux points de tangence, on peut placer deux rayons sur un même segment de droite pour relier les centres de deux cercles. Soit r le rayon cherché du petit cercle. À partir des paramètres identifiés sur la figure on peut établir les relations (pythagore) :

$(1+r)^2 = a^2 + (1-r)^2 \Rightarrow 1 + 2r + r^2 = a^2 + 1 - 2r + r^2 \Rightarrow 4r = a^2$

$(4+r)^2 = b^2 + (4-r)^2 \Rightarrow 16 + 8r + r^2 = b^2 + 16 - 8r + r^2 \Rightarrow 16r = b^2$

On a donc que $2a = b$. De plus, le triangle rectangle 3, 4, 5 (pointillé) nous permet d'établir que $a + b = 4$

On en déduit que $a = 4/3$, $b = 8/3$ et donc que $r = 4/9$

2. Des racines et encore des racines

Soit $k = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}}}$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que k ne tend vers un nombre entier que si n est le produit de deux entiers consécutifs.

Solution :

$k = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}}} \;\Rightarrow\; k^2 = n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}}$

$\Rightarrow\; \mathrm{k}^2 = n+k \;\Rightarrow\; k^2-k-n=0 \;\Rightarrow\; k = \frac{1\pm\sqrt{1+4n}}{2}$

k étant un nombre positif il sera un entier si la racine positive $\sqrt{1+4n}$ est un nombre entier impair. On aura donc, pour s entier, que

$\sqrt{1+4n} = 2s+1 \;\Rightarrow\; 1+4n = 4s^2+4s+1 \;\Rightarrow\; 4n = 4s^2+4s$

$\Rightarrow\; n = s^2+s = s(s+1)$, soit le produit de deux entiers consécutifs.

Rem : On a également que si $k^2-k-n=0$ alors $n = k^2-k = k(k-1)$. Donc, si k est un entier, n sera le produit de deux entiers consécutifs.

3. Les zéros impossibles

Soit $f(x) = x^3+px^2+qx+r$ où p, q et r sont des entiers. Montrer que si $f(0)$ et $f(1)$ sont tous deux impairs, alors la fonction ne peut pas posséder trois zéros entiers.

Solution :

Si la fonction possédait trois zéros entiers elle se décomposerait en :

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

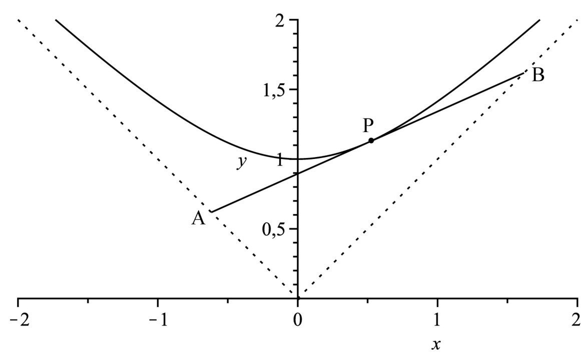
Si $f(0) = -abc$ est impair, alors a, b et c doivent tous les trois être impairs. Alors $f(1) = (1-a)(1-b)(1-c)$ est le produit de trois nombres pairs, donc pair. Cela vient en contradiction avec le fait que $f(1)$ soit impair ce qui signifie que l'hypothèse initiale qu'il y a trois zéros entiers est fausse.

Autre solution :

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$. Si $f(0) = r$ est impair, alors $-abc$ est impair et a, b et c doivent tous les trois être impairs. Si $f(1) = 1+p+q+r$ est aussi impair, alors p et q doivent être de parité différente ($1+r$ est pair). Comme $p = a+b+c$, la somme de trois impairs donne un impair, mais $q = ab+ac+bc$ qui est aussi la somme de trois impairs, donc donne un impair. Contradiction.

4. Une drôle d'aire

Considérons un point P quelconque de l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$ représentée sur la figure ci-contre avec ses asymptotes. Montrer que le triangle formé de la tangente à l'hyperbole au point P et des deux asymptotes de l'hyperbole aura toujours une surface dont l'aire est de 1, peu importe le point P.



Solution :

Soit $P = (x_0, y_0)$ un point quelconque de l'hyperbole. En dérivant implicitement l'équation de celle-ci, on obtient $2y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ donc $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$. L'équation de la tangente au point P sera donc $y = \frac{x_0}{y_0}x + \left(y_0 - \frac{x_0^2}{y_0}\right)$. Les équations des asymptotes sont $y = x$ et $y = -x$.

Le point d'intersection des deux asymptotes est $(0,0)$. Le point d'intersection A de la tangente avec la droite $y = -x$ s'obtient en substituant le y de l'équation de la tangente par $-x$, ce qui donne :

$-x = \frac{x_0}{y_0}x + \left(y_0 - \frac{x_0^2}{y_0}\right) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{y_0} - y_0 = \frac{x_0}{y_0}x + x \Leftrightarrow x_0^2 - y_0^2 = x_0x + xy_0$

$\Leftrightarrow \frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0 + y_0} = x \Leftrightarrow x_0 - y_0 = x$. On obtient donc que $A = (x_0 - y_0, y_0 - x_0)$.

Le point d'intersection B de la tangente avec la droite $y = x$ s'obtient en substituant le y de l'équation de la tangente par x, ce qui donne :

$x = \frac{x_0}{y_0}x + \left(y_0 - \frac{x_0^2}{y_0}\right) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{y_0} - y_0 = \frac{x_0}{y_0}x - x \Leftrightarrow x_0^2 - y_0^2 = x_0x - xy_0$

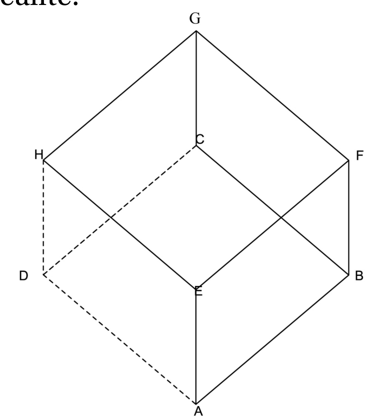
$\Leftrightarrow \frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0 - y_0} = x \Leftrightarrow x_0 + y_0 = x$. On obtient donc que $B = (x_0 + y_0, x_0 + y_0)$.

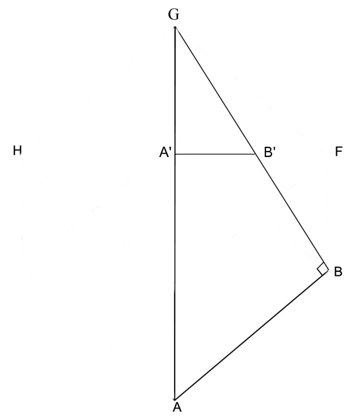
Le triangle est rectangle avec l'angle droit à l'origine. Donc l'aire est le produit des distances des points A et B à l'origine divisé par deux.

Aire $= \frac{(\sqrt{2}|y_0 - x_0|)(\sqrt{2}|y_0 + x_0|)}{2} = \frac{2|y_0^2 - x_0^2|}{2} = 1$. La dernière égalité est justifiée par le fait que $P = (x_0, y_0)$ vérifie l'équation de l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$.

5. Flacon rempli aux deux tiers ?

Josée possède un petit flacon cubique de 3 centimètres de côté contenant un liquide précieux qu'un marchand veut lui acheter. Pour fixer le prix, le marchand prétend que le flacon est rempli aux deux tiers car si on le place de telle sorte qu'une grande diagonale du cube (par exemple AG sur la figure) soit perpendiculaire au sol, il y a du liquide jusqu'aux deux tiers de cette diagonale. Pour savoir si Josée a intérêt à accepter cette interprétation, trouver la fraction du volume du flacon que le liquide représente en réalité.





Solution :

Posons que la grande diagonale perpendiculaire au sol est $\overline{AG}$ où A est le point de contact avec le sol. Étudions le triangle GAB. Posons A' sur $\overline{AG}$ et B' sur $\overline{BG}$ les points du niveau du liquide.

Comme le cube a 3 cm d'arête et que le niveau arrive au 2/3 de AG, on sait que $m\overline{AG} = 3\sqrt{3}$, $m\overline{AA'} = 2\sqrt{3}$, $m\overline{A'G} = \sqrt{3}$ et $m\overline{BG} = 3\sqrt{2}$.

Le triangle $A'GB'$ est semblable au triangle AGB, donc $\frac{m\overline{B'G}}{m\overline{A'G}} = \frac{m\overline{AG}}{m\overline{BG}}$
$\Rightarrow m\overline{B'G} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

On constate donc que B' est en plein centre de $\overline{BG}$. Le niveau du liquide arrive donc exactement à la hauteur des sommets F, C et H.

Le volume du liquide est donc celui du cube moins celui de la pyramide dont la base est le triangle FCH. L'aire de cette base est $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (par pythagore). La hauteur de la pyramide est le tiers de la grande diagonale $\overline{AG}$ donc $\sqrt{3}$ ce qui fait un volume de $\frac{9}{2}$ pour la pyramide. Le volume du liquide est donc $3^3 - \frac{9}{2} = \frac{45}{2}$ et ce volume représente donc $\frac{\frac{45}{2}}{27} = \frac{45}{54} = \frac{5}{6}$ du volume du cube.

Comme ce rapport est supérieur à $\frac{2}{3}$, Josée serait mieux de refuser l'interprétation du marchand.

6. Une souris pas commode

Jacob a une commode rectangulaire ayant 3 rangées de 3 tiroirs dans laquelle se cache régulièrement une souris. Elle choisit d'abord l'un des tiroirs au hasard puis, chaque fois que Jacob ouvre un tiroir pour vérifier si la souris s'y trouve et qu'elle n'y est pas, elle attend qu'il le referme et sort alors du tiroir où elle était afin de le narguer. Elle se cache ensuite dans l'un des tiroirs adjacents, horizontalement ou verticalement, qu'elle choisit toujours au hasard.

a) Trouver la meilleure stratégie à employer pour que Jacob attrape le plus rapidement possible la souris.

b) S'il se donne les meilleures chances possible, calculer le nombre moyen d'essais nécessaires pour que Jacob attrape la souris.

Solution :

a) L'endroit à partir duquel la souris a le plus grand nombre de possibilités de déplacement (quatre) est le tiroir du milieu. Pour se donner les meilleures chances, Jacob doit donc, *lorsque possible*, choisir le tiroir du milieu. Ainsi, s'il se trompe, cela signifie que la souris n'était pas dans le tiroir du milieu, ce qui limite par la suite ses possibilités de mouvement.

b) Posons :

n_0 : Nombre moyen d'essais requis dans la situation initiale
n_1 : Nombre moyen d'essais requis si l'on vient de voir la souris dans un des tiroirs en coin
n_2 : Nombre moyen d'essais requis si l'on vient de voir la souris dans un tiroir de côté

On a alors :

$$n_0 = 1 + \frac{1}{9} * 0 + \frac{4}{9} n_1 + \frac{4}{9} n_2 = 1 + \frac{4}{9} n_1 + \frac{4}{9} n_2$$
$$n_1 = 1 + \frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} n_2 = 1 + \frac{1}{2} n_2$$
$$n_2 = 1 + \frac{1}{3} * 0 + \frac{2}{3} n_1 = 1 + \frac{2}{3} n_1$$

Il ne reste qu'à résoudre.

$$n_1 = 1 + \frac{1}{2} n_2 = 1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{3} n_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} n_1$$

On obtient donc :

$$n_1 = \frac{9}{4}$$
$$n_2 = 1 + \frac{2}{3} n_1 = 1 + \frac{2}{3} * \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$$
$$n_0 = 1 + \frac{4}{9} n_1 + \frac{4}{9} n_2 = 1 + \frac{4}{9} * \frac{9}{4} + \frac{4}{9} * \frac{5}{2} = \frac{28}{9}$$

Le nombre moyen d'essais requis est donc $\frac{28}{9}$.