CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC
NIVEAU COLLÉGIAL

2002

SOLUTIONNAIRE

QUESTION* 1 - *Boules rouges et bleues

Une boîte contient 10 boules : 4 rouges et 6 bleues. Une seconde boîte contient 16 boules rouges et un nombre inconnu de boules bleues. On pige au hasard une boule dans chacune des deux boîtes. Sachant que la probabilité que les deux boules pigées soient de même couleur est 44%, trouver le nombre de boules bleues dans la seconde boîte.

SOLUTION

Soit x le nombre de boules bleues (cherché) dans la seconde boîte. La probabilité que les deux boules pigées soient rouges est :

$$\frac{4}{10}\times\frac{16}{16+x}=\frac{32}{80+5x}$$

La probabilité que les deux boules pigées soient bleues est :

$$\frac{6}{10}\times\frac{x}{16+x}=\frac{3x}{80+5x}$$

La probabilité que les deux boules pigées soient de la même couleur est :

$$\frac{32}{80+5x}+\frac{3x}{80+5x}=.44=\frac{11}{25}$$

On en tire l'équation

$$25(3x+32)=11(80+5x)$$

ou encore $75x + 800 = 880 + 55x$ d'où $20x = 80$ et $x = 4$.

QUESTION* 2 - *Une égalité vraiment surprenante

Prouver l'égalité suivante par des manipulations algébriques :

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

SOLUTION :

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{1+3\sqrt{5}+3\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^3}{8}$$

$$=\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}=\frac{16+8\sqrt{5}}{8}=2+\sqrt{5}.$$

De même $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3=2-\sqrt{5}$ ainsi $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1.$

AUTRE SOLUTION

On peut aussi résoudre ce problème en posant $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. On trouve alors

$$\begin{aligned}x^3&=\sqrt{2+\sqrt{5}}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2+\left(2-\sqrt{5}\right)\\&=2+\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)+2-\sqrt{5}\\&=2+\sqrt{5}+3\sqrt[3]{4-5}\;x+2-\sqrt{5}=4-3x.\end{aligned}$$

On voit que $x = 1$ est une solution. Les deux autres solutions sont à rejeter puisque x^2+x+4, obtenu en divisant x^3+3x-4 par $x-1$, n'a que des racines imaginaires.

QUESTION* 3 - *Carrés parfaits versus 2002

a) Déterminer (s'il existe) le plus petit carré parfait *N* se terminant par 2002 lorsque *N* est écrit en base 10. Rappelons qu'un entier *N* est un carré parfait si $N = k^2$, où *k* est un entier.

b) Déterminer (s'il existe) le plus petit carré parfait *N* se terminant par 2002 lorsque *N* est écrit en base 7.

SOLUTION

a) Posons $N = k^2$. Donc $N = 10000m + 2002$ pour un entier *m*. De plus si $N = k^2$, alors *k* doit être un entier pair parce que *N* est pair et le produit de deux nombres impairs est impair. Conséquemment nous avons soit $k = 4\ell$, soit $k = 4\ell + 2$. Si $k = 4\ell$, alors $N = k^2 = 16\ell^2 = 10000m + 2002$, mais ceci est impossible parce que 4 divise $16\ell^2$ et 4 ne divise pas $10000m + 2002$. Si $k = 4\ell + 2$, alors $N = k^2 = 16\ell^2 + 16\ell + 4 = 10000m + 2002$, mais ceci est encore impossible parce que 4 divise $16\ell^2 + 16\ell + 4$ et 4 ne divise pas $10000m$ $+2002$. Il n'y a pas de carré parfait se terminant par 2002 lorsqu'écrit en base 10.

b) Posons $N = k^2$. Donc $N = 7^4 m + 2\left(7^3\right) + 2 = 7^4 m + 688$ pour un entier *m*. De plus, comme $N = k^2$, alors soit $k \equiv 3$ (mod 7), soit $k \equiv 4$ (mod7) parce que $N = k^2 = 7^4 m + 688 \equiv 2$ (mod7). Si $k \equiv \pm 3$ (mod7) et $N = k^2$, alors soit $k \equiv 10$ (mod 49), soit $k \equiv 39$ (mod 49) parce que $N = k^2 = 7^4 m + 688 \equiv 2$ (mod 49). Si $k \equiv \pm 10$ (mod 49) et $N = k^2$, alors soit $k \equiv 108$ (mod 343), soit $k \equiv 235$ (mod 343) parce que $N = k^2 = 7^4 m + 688 \equiv 688$ (mod 2401). Donc $k \equiv \pm 921$ (mod 2401) et le plus petit carré parfait se terminant par 2002 lorsque *N* est écrit en base 7 est $N = (921)^2 = 848241 = 10132002_{(7)}$.

QUESTION* 4 - *Le découpage parabolique

Trouver l'équation de la parabole dont le sommet se trouve en (0,0) et qui sépare en trois parties d'aires $1/4, 1/4$ et $1/2$ le carré $(1/2, 0)$, $(1/2, 1)$, $(-1/2, 1)$, $(-1/2, 0)$.

SOLUTION

Soit $y = ax^2$ l'équation cherchée. Le problème consiste à déterminer a. D'abord, observons que la parabole doit croiser le carré sur son côté horizontal supérieur plutôt que sur ses côtés verticaux car alors les aires des deux régions sous la courbe seraient inférieures à 1/4 comme en fait foi la figure de gauche :

Ce graphisme d
L'impression se
Nom du fichiQu
Titre : (Adobe Il
Créateur : Adob
Date de créatio

Ce graphisme c
L'impression se
Nom du fichiQu
Titre : (Adobe Il
Créateur : Adob
Date de créatio

Désignons donc par (k, 1) et (-k, 1) les points de rencontre de la parabole avec le carré (voir la figure de droite). On doit avoir $1 = ak^2$, donc $k = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Puisque Aire région (1) + Aire région (2) = $\dfrac{1}{4}$, on a :

$$\frac{1}{4} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} ax^2dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$= \frac{ax^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{a}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt{a}} + \frac{1}{2}$$

Et donc, $\sqrt{a} = \frac{8}{3}$, i.e. $a = 7\frac{1}{9}$. L'équation cherchée est donc $y = \left(7\frac{1}{9}\right)x^2 = \frac{64}{9}x^2$

QUESTION* 5 - *Le triangle et le cercle

Un triangle dont les angles sont A, B et C est inscrit dans un cercle de rayon R. Quelle est l'aire de ce triangle ? Votre réponse doit être une formule mathématique qui fait appel aux quatre symboles A, B, C et R.

Ce graphisme de forma
L'impression sera bonn
Nom du fichiTriangle
Titre : (Adobe Illustrato
Créateur : Adobe Illustr
Date de créatio (12/17/

SOLUTION

On supposera que les angles sont tous < 90° et que le centre du cercle est dans le triangle.

Ce graphisme de forma
L'impression sera bonn
Nom du fichiTriangle s
Titre : (Adobe Illustrato
Créateur : Adobe Illustr
Date de créatio (12/17/

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}R\cdot R\sin 2A + \frac{1}{2}R\cdot R\sin 2B + \frac{1}{2}R\cdot R\sin 2C = \frac{1}{2}R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)\,.$$

Note : La formule reste valable losque le centre du cercle est hors du triangle.

QUESTION* 6 - *La réunion de famille

Dans la famille d'Abel Belgrillet, on est artiste ou mathématicien de générations en générations. Chaque réunion se termine par une séance de problèmes de mathématiques, une récitation de poésie ou un concours de sculpture ! On déplore cependant qu'aucun membre de cette famille n'ait atteint l'âge de 95 ans (l'âge étant ici considéré comme un nombre entier, bien entendu). Lors de la dernière réunion de famille, Émilie (dix ans) affirme qu'aussi longtemps que ce fait perdurera, on pourra être assuré que dans toute réunion de la famille Belgrillet, qui compte au moins dix membres, il sera toujours possible d'en extraire deux groupes non-vides ayant les trois propriétés suivantes :

1) il y a, au maximum, une personne de plus dans un groupe que dans l'autre;
2) personne n'appartient aux deux groupes à la fois;
3) la somme des âges dans chaque groupe est égale.

A-t-elle raison ? Si oui, prouvez-le. Sinon, construisez un contre-exemple (i.e., exhibez un ensemble de dix nombres distincts allant de 0 à 94 tels que la construction des deux groupes susmentionnés n'est pas possible).

SOLUTION

Émilie a raison. En effet, supposons une réunion d'au moins dix personnes, et considérons dix personnes d'entre elles. Si, parmi les dix personnes réunies, deux ont le même âge, le problème est résolu, car ces deux personnes forment deux groupes ayant les propriétés voulues. *Supposons donc qu'ils ont tous des âges différents et non nuls. Maintenant, considérons les groupes formés de quatre ou cinq personnes. La somme des âges dans un tel groupe est au plus 90+91+92+93+94 = 460 (et au moins 1+2+3+4 = 10).

Il y a $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ façons de former un groupe de cinq personnes et $\binom{10}{4} = \frac{10!}{6!4!} = 210$ façons d'en former un groupe de quatre. Cela fait donc 462 façons pour 451 sommes possibles (de 10 à 460). Il y a donc au moins deux groupes de personnes qui donnent la même somme. Comme ces deux groupes sont tous deux formés de quatre personnes, tous deux de cinq, ou un de quatre personnes et un de cinq personnes, les conditions 1 et 3 ci-haut sont respectées. Pour satisfaire à la condition 2, il suffit de former deux nouveaux groupes en retirant de chacun des groupes initiaux les individus qui appartiennent aux deux groupes. Il est alors clair que les conditions 1, 2 et 3

seront respectées, et qu'aucun des ensembles obtenus ne sera vide.

* Si l'un d'eux est d'âge zéro (i.e. un bébé de moins de douze mois !) alors une analyse plus détaillée doit être faite.

Ce point délicat, mentionné par le professeur Pierre Lalonde, aurait pu faire la différence dans le classement.