CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC - Niveau collégial; février 2001

SOLUTIONNAIRE

QUESTION 1 - Lecture inversée

Solution. Soit $x = (abcd)_{10}$ le nombre cherché.
L'équation $4x = x^*$ devient:

$$4x = 4000a + 400b + 40c + 4d = 1000d + 100c + 10b + a = x^*$$

On doit avoir $a > 0$ sinon x n'aurait que 3 chiffres. De plus a est forcément un entier pair. Si a était 4, 6 ou 8 alors x^* aurait plus de quatre chiffres. On en conclut que $a = 2$ et $d = 8$. En remplaçant par ces valeurs, l'équation devient

$$400b + 40c + 32 = 100c + 10b + 2,$$

ou encore:

$$390b + 30 = 60c$$

$$13b + 1 = 2c$$

Comme $2c$ est au plus 18 (car $0 \leq c \leq 9$) on trouve $b = 1$ et $13b + 1 = 14 = 2c$ donne $c = 7$.

L'unique solution est donc: $x = 2178$ (et on a bien $x^* = 8712 = 4x$)

QUESTION 2 - Factorisation spéciale

Solution. Il est évident que $x = 1$ est racine du polynôme.
Posons $a(x) = x - 1$, $b(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ et $c(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Divisant le polynôme par $x - 1$ on trouve $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1$. En multipliant $a(x)$ et $b(x)$, et en égalant terme à terme on trouve: $x^7 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 - 1)(x^3 + x - 1)$.

QUESTION 3 - Le terrain du boulanger

Solution. Soit x la base et y la hauteur du rectangle. L'aire du champ est: $2 = xy + \frac{\pi}{8}x^2$

D'où l'on tire: $y = \frac{2}{x} - \frac{\pi}{8}x$

On cherche à minimiser le périmètre P du terrain qui est: $P = x + 2y + \frac{\pi}{2}x = x + \frac{4}{x} - \frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{2}x$

$$\frac{d}{dx}P = 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{\pi}{4} \qquad , \qquad \frac{d^2}{dx^2}P = \frac{8}{x^3}$$

La dérivée s'annule pour $\frac{4}{x^2} = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{4}$, *i.e.* $x = \frac{4}{\sqrt{4+\pi}}$

et alors $\frac{d^2P}{dx^2} > 0$. Les dimensions du champ sont donc:

$x = base = \frac{4}{\sqrt{4+\pi}}$ et y = hauteur du rectangle $= \frac{\sqrt{4+\pi}}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{4+\pi}} = \frac{2}{\sqrt{4+\pi}}$

QUESTION 4 - Le train inspecté

Solution. La probabilité que k wagons soient défectueux

est: $\binom{100}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ car il y a $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(100-k)!}$

façons de choisir lesquels des 100 wagons sont les k candidats à être défectueux puis $p^k(1-p)^{100-k}$ comme probabilité qu'ils le soient et que les $100-k$ autres ne le soient pas.

S'il y a k wagons défectueux, les 2 inspecteurs doivent se tromper k fois: $(1-p_1)(1-p_2)$ est la probabilité que face à un wagon défectueux les deux inspecteurs se trompent; pour k fois de suite, c'est: $((1-p_1)(1-p_2))^k$.

Le total de toutes ces probabilités, lorsque $k = 0,1,2,\ldots,100$, est la probabilité que le train quitte la gare avec ou sans $(k=0)$ wagon défectueux. La probabilité qu'aucun wagon ne soient défectueux et que le train quitte ainsi la gare est $(1-p)^{100}$.

La probabilité que le train quitte la gare est:

$$\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}p^k(1-p)^{100-k}(1-p_1)^k(1-p_2)^k = \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(p(1-p_1)(1-p_2)\right)^k(1-p)^{100-k}$$

$$= \left(p(1-p_1)(1-p_2) + (1-p)\right)^{100} = \left(1 - p(p_1 + p_2 - p_1p_2)\right)^{100}$$

On peut aussi raisonner comme suit: cent fois de suite il ne faut pas que le wagon soit défectueux (prob. p) et qu'au moins un des inspecteurs le détecte
$\left(\text{prob. } 1-(1-p_1)(1-p_2)=p_1+p_2-p_1p_2\right)$

La réponse au problème est donc:

$$\left(1-p(p_1+p_2-p_1p_2)\right)^{100}-\left(1-p^{100}\right)$$

QUESTION 5 - Les carrés traversés

Solution Plaçons le coin en bas à gauche à l'origine dans le plan cartésien (où l'unité est le côté d'un petit carré). Le sommet en haut à droite est de coordonnées (2001, 999). La pente de la diagonale vaut 999/2001 (soit un peu moins que 1/2).

Le plus grand commun diviseur de 999 et 2001 est 3.
En effet 999 = 3 ·.333 = 3 · 3 · 3 · 37
et 2001 = 3 · 667 = 3 · 23 · 29.
Ceci nous assure que la diagonale va passer par les points (0,0), (667, 333), 2 · (667, 333) = (1334, 666) et (2001, 999) = 3 · (667, 333), et aucun autre.

Le premier tiers de la diagonale part du point (0,0) et aboutit au point (667, 333). Il traverse donc 667 parois horizontales et 333 parois verticales. Hachurons un carré juste avant de le quitter en traversant une paroi. Dans le premier tiers, on aura hachuré 667 + 333 - 1 = 999 carrés (le dernier carré est quitté par une paroi horizontale et verticale en même temps!).

Réponse: $3\times 999=2997$

Remarque. Dans le cas général d'un rectangle $m\times n$, le nombre de carrés traversés est: $m+n-d$ où d est le plus grand commun diviseur de m et n.

QUESTION 6 - Le triangle rectangle pythagoricien

Solution. Soit a, b et $d=\sqrt{a^2+b^2}$ les trois côtés du triangle rectangle. On sait que le nombre premier p divise le périmètre $a+b+d$ et on veut montrer que p divise a ou b.

Posons $a+b=np+r$ et $d=mp-r$ avec $0\le r<p$. On a: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=Np+r^2$ et $a^2+b^2=Mp+r^2$. Par soustraction on en déduit que p divise $2\,ab$. Comme p est premier:

p divise 2 (et est 2) ou p divise a ou p divise b. Seul le cas $p = 2$ reste donc à régler. Mais si 2 divise $a+b+d$, c'est que a, b *et* d sont tous pairs, ou deux sont impairs et le troisième est pair. Le seul cas problème reste: a et b *impairs* (et donc non-divisible par p=2) et d pair. On va voir que ce dernier cas est impossible.

En effet: $a = 2k + 1 \quad et \quad b = 2l + 1$ implique

$$a^2 + b^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 4L + 2$$

mais $4L + 2$ ne peut pas être d^2, le carré d'un entier pair.

Autre solution. Il est connu depuis Euler (et bien avant) que tout triangle phythagoricien est de la forme: $k\left(x^2 + y^2\right), \quad k\left(x^2 - y^2\right), \quad k\left(2xy\right)$.

On peut sans perte de généralité supposer $k = 1$. Soit p qui divise le périmètre: $2x^2 + 2xy = 2x(x + y)$. Si p divise 2 (et est donc 2) il divisera le côté $2xy$. Si p divise x il divise aussi $2xy$. Finalement si p divise $x + y$ (notez que les deux petits côtés sont $2xy$ et $x^2 - y^2$) il divisera $x^2 - y^2$)