

Concours de l'Association Mathématique du Québec Niveau collégial

Le vendredi 8 février 2008
Solutions officielles

1. Le nombre gigantesque

Le nombre $2007^{2008} + 2008^{2007}$ est très grand : il faut exactement 6632 chiffres pour l'écrire au long, en base 10. Par quel chiffre se termine-t-il (autrement dit : quel est son chiffre des unités) ?

Il est clair que le dernier chiffre de $2007^{2008} + 2008^{2007}$ est le même que le dernier chiffre de $7^{2008} + 8^{2007}$ (en effet, $2007^{2008} = (2000 + 7)^{2008}$ et en développant le binôme, tous les termes sauf 7^{2008} sont des multiples de 2000, donc leur chiffre des unités est zéro ; semblablement pour le terme 2008^{2007}).

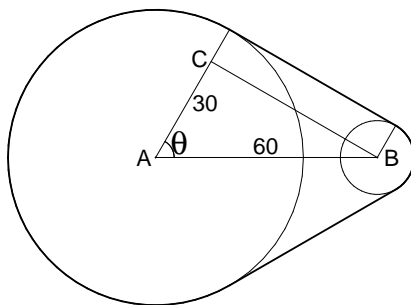
Les premières puissances de 7 sont $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$. Le chiffre des unités de 7^n se répète selon le motif 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ... Puisque 2008 est un multiple de 4, son chiffre des unités est 1.

De même, les premières puissances de 8 sont $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4096$, $8^5 = 32768$. Le chiffre des unités de 8^n se répète selon le motif 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, ... Puisque 2007 est un de moins qu'un multiple de 4, son chiffre des unités est 2.

Le chiffre des unités de $2007^{2008} + 2008^{2007}$ est donc $1 + 2 = 3$.

2. La courroie

Deux poulies circulaires sont reliées par une courroie bien tendue comme dans la figure suivante. Les poulies sont de rayons 40 cm et 10 cm ; leurs centres sont distants de 60 cm. Quelle est la longueur de la courroie ?



Dans la figure ci-dessus, on a tracé deux rayons aux points de tangence. Le triangle ABC est rectangle en C . Par Pythagore, on a $BC = \sqrt{60^2 - 30^2} = 30\sqrt{3}$. C'est la longueur de chacune des deux parties droites de la courroie.

De plus, puisque l'hypoténuse AB mesure le double du côté AC , on a $\theta = 60^\circ$, de sorte que la courroie décrit un arc de $360 - 2 \times 60 = 240$ degrés (deux tiers de circonférence) autour de la grande poulie, et donc de 120 degrés (un tiers de circonférence) autour de la petite poulie.

La longueur totale de la poulie est donc

$$2 \times 30\sqrt{3} + \frac{2}{3} \times 2\pi \times 40 + \frac{1}{3} \times 2\pi \times 10 = 60(\sqrt{3} + \pi) \text{ cm.}$$

3. Les cubes consécutifs

Démontrez que la somme des cubes d'entiers consécutifs strictement plus grands que 1 n'est jamais un nombre premier.

Soit $1 < m < n$ des entiers. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n i^3 &= \left(\sum_{i=1}^n i^3 \right) - \left(\sum_{i=1}^{m-1} i^3 \right) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{m(m-1)}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} \right) \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

et on a écrit la somme comme un produit d'entiers plus grands que 1. Ce n'est donc pas un nombre premier.

4. Les paniers de pommes

Il y a deux paniers identiques. L'un contient 4 pommes rouges et 3 pommes vertes, l'autre contient 2 pommes rouges et 3 pommes vertes. Quelqu'un choisit un panier au hasard et vous l'apporte. Vous tirez une pomme de ce panier.

(a) Quelle est la probabilité que ce soit une pomme rouge ?

Vous regardez et la pomme vous avez tirée est rouge. Elle est appétissante. Vous la mangez; effectivement, elle est délicieuse. Vous tirez ensuite une seconde pomme du même panier.

(b) Quelle est la probabilité que ce soit une pomme rouge ?

- (a) Soit R l'événement « tirer une pomme rouge », A l'événement « choisir le premier panier » et B l'événement « choisir le deuxième panier ». On sait que $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, et on connaît aussi les probabilités conditionnelles $P(R | A) = \frac{4}{7}$ et $P(R | B) = \frac{2}{5}$. On cherche $P(R)$. Puisque A et B forment une partition, la formule de probabilité totale s'applique et on a

$$P(R) = P(R | A) \cdot P(A) + P(R | B) \cdot P(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

- (b) Le premier panier contenait une plus grande proportion de pommes rouges que l'autre, donc le fait d'avoir tiré une pomme rouge vient augmenter la probabilité de l'avoir choisi. Utilisons la formule de Bayes pour trouver $P(A | R)$, la probabilité qu'on ait choisi le premier panier sachant qu'on vient de tirer une boule rouge. C'est

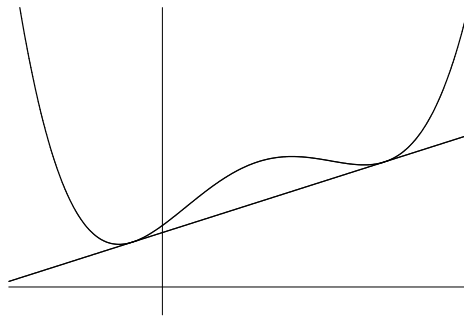
$$P(A | R) = \frac{P(R | A) \cdot P(A)}{P(R)} = \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{17}{35}} = \frac{10}{17}.$$

En considérant maintenant que $P(A) = 10/17$ et $P(B) = 7/17$, et sans oublier qu'il y a une pomme rouge de moins, la probabilité que la deuxième pomme soit rouge est

$$P(R) = P(R | A) \cdot P(A) + P(R | B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{17} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{17} = \frac{27}{68}.$$

5. La pente de la bitangente

Une *bitangente* à une courbe est une droite qui lui est tangente en deux points distincts. Le graphique ci-dessous illustre l'unique bitangente à la courbe d'équation $y = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x + 11$. Quelle est la pente de la bitangente ?



Pour que la droite $y = ax + b$ soit bitangente à la courbe $y = f(x)$, donnée, il faut et il suffit que le polynôme $f(x) - (ax + b)$ possède deux racines doubles, autrement dit qu'il existe u et v (les abscisses des points de tangence) tels que

$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x + 11 - (ax + b) = (x - u)^2(x - v)^2$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 + 4x^2 + (10 - a)x + (11 - b) \\ = x^4 + (-2u - 2v)x^3 + (u^2 + 4uv + v^2)x^2 + (-2uv^2 - 2u^2v)x + u^2v^2 \end{aligned}$$

En posant l'égalité des coefficients, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} -5 = -2u - 2v \\ 4 = u^2 + 4uv + v^2 \\ 10 - a = -2uv^2 - 2u^2v \\ 11 - b = u^2v^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = 2(u + v) \\ 4 = (u + v)^2 + 2uv \\ a = 10 - 2uv(u + v) \\ 11 - b = u^2v^2 \end{cases}$$

La première équation donne $u + v = \frac{5}{2}$, et par remplacement dans la deuxième on trouve $uv = \frac{9}{8}$. La troisième équation donne alors $a = 10 - \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{8}$ qui est la pente cherchée.

6. La serrure

Dans certains bâtiments, on rencontre des portes munies d'une serrure numérique à cinq boutons. Les combinaisons de cette serrure sont formées d'une séquence de mouvements (au moins un). Il y a deux sortes de mouvements : soit on appuie sur un seul bouton, soit on appuie sur deux boutons en même temps. Un bouton donné n'est jamais appuyé plus d'une fois durant une combinaison. Certaines combinaisons n'utilisent pas tous les boutons. L'ordre des mouvements est important. Combien de combinaisons différentes y a-t-il ?

Si on note S une pression simple (un bouton) et D une pression double (deux boutons en même temps), les combinaisons possibles sont S, SS, SSS, SSSS, SSSSS, D, DS, DSS, DSSS, DD, DDS ainsi que leurs anagrammes (puisque l'ordre importe). On peut construire la table suivante. Notez que le choix d'un bouton double se fait à l'aide d'une combinaison puisque l'ordre n'est pas important dans un bouton double (appuyer 2 et 3 ensemble est la même chose que 3 et 2 ensemble) tandis que le choix des boutons simples se fait à l'aide d'un arrangement puisque l'ordre des boutons est important (2 puis 3 n'est pas la même chose que 3 puis 2).

| Type de combinaison | Nombre d'anagrammes | Choix des boutons | Nombre de combinaisons |
|---------------------|---------------------|--------------------------------------|------------------------|
| S | $1!/1! = 1$ | $A_1^5 = 5$ | $1 \cdot 5 = 5$ |
| SS | $2!/2! = 1$ | $A_2^5 = 20$ | $1 \cdot 20 = 20$ |
| SSS | $3!/3! = 1$ | $A_3^5 = 60$ | $1 \cdot 60 = 60$ |
| SSSS | $4!/4! = 1$ | $A_4^5 = 120$ | $1 \cdot 120 = 120$ |
| SSSSS | $5!/5! = 1$ | $A_5^5 = 120$ | $1 \cdot 120 = 120$ |
| D | $1!/1! = 1$ | $C_2^5 = 10$ | $1 \cdot 10 = 10$ |
| DS | $2! = 2$ | $C_2^5 \cdot A_1^3 = 30$ | $2 \cdot 30 = 60$ |
| DSS | $3!/2! = 3$ | $C_2^5 \cdot A_2^3 = 60$ | $3 \cdot 60 = 180$ |
| DSSS | $4!/3! = 4$ | $C_2^5 \cdot A_3^3 = 60$ | $4 \cdot 60 = 240$ |
| DD | $2!/2! = 1$ | $C_2^5 \cdot C_2^3 = 30$ | $1 \cdot 30 = 30$ |
| DDS | $3!/2! = 3$ | $C_2^5 \cdot C_2^3 \cdot A_1^1 = 30$ | $3 \cdot 30 = 90$ |

Il y a donc, au total, $5 + 20 + 60 + 120 + 120 + 10 + 60 + 180 + 240 + 30 + 90 = 935$ combinaisons. Ce genre de serrure n'est donc pas très sécuritaire : on peut essayer toutes les combinaisons en une heure ou deux.