Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau Collégial

Le vendredi, 10 février 2006, de 9h à 12h

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

QUESTION 1 – Dix boules d'une même couleur

Dans une boîte, il y a 18 boules bleues, 15 boules vertes, 8 boules jaunes, 7 boules rouges et 20 boules oranges. Trouver le plus petit nombre de boules que l'on doit piger dans la boîte (sans remise) pour être certain d'avoir au moins dix boules d'une même couleur. [Note : bien sûr, il se peut que les dix premières boules pigées soient d'une même couleur, mais ça ne correspond pas à la question].

Esquisse de solution :
Au pire, on pigera les 8 jaunes, les 7 rouges, 9 bleues, 9 vertes et 9 oranges, pour un total de 42 boules et la 43^{e} boule sera la 10^{e} bleue, verte ou orange.
Réponse : 43.

QUESTION 2 – Une factorisation spéciale

Il est bien connu que tout nombre entier > 1 peut être écrit comme un produit de nombres premiers. Par exemple, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ et $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Quelle est l'écriture du nombre

$$12345654321$$

comme produit de nombres premiers ?

Esquisse de solution :
On vérifie facilement que

$$111111^2 = 12345654321.$$

Mais,

$$\begin{aligned} 111111 &= 111 \cdot 1001 \\ &= (3 \cdot 37) \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13). \end{aligned}$$

Ainsi

$$12345654321 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 37^2.$$

QUESTION 3 – De Héron à Pythagore

Considérons un triangle quelconque dont les côtés mesurent a, b et c unités. L'aire de ce triangle est donnée par la formule suivante due au mathématicien grec Héron

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ désigne le demi-périmètre du triangle. Démontrer que la formule de Héron entraîne le théorème de Pythagore

$$a^2 + b^2 = c^2$$

dans le cas particulier où le triangle est rectangle d'hypothènuse c. [Aide : Considérer l'aire du triangle rectangle.]

Esquisse de solution :
Le triangle est rectangle si et seulement si $S = \frac{1}{2}\,ab$. Ainsi, si le triangle est rectangle, on a

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{a^2b^2}{4}.$$

En d'autres termes

$$\frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2} \cdot \frac{(a-b+c)}{2} \cdot \frac{(-a+b+c)}{2} = \frac{a^2b^2}{4}.$$

On obtient alors successivement

$$\frac{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)}{16} = \frac{a^2b^2}{4},$$

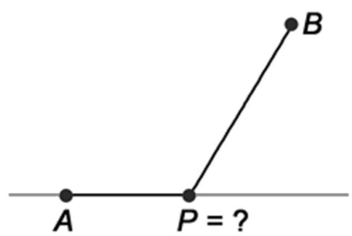
$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2,$$
$$2c^2(a^2 + b^2) = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2,$$
$$2c^2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)^2 + c^4,$$
$$c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)^2 = 0,$$
$$(c^2 - (a^2 + b^2))^2 = 0.$$

D'où,

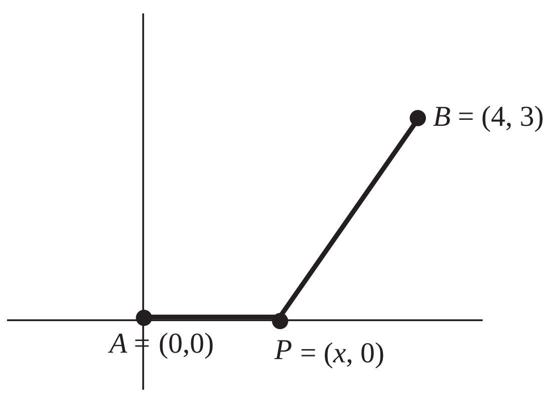
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

QUESTION 4 – La course d'André vers Béatrice

André est à bicyclette au point A sur un route rectiligne et est impatient de rencontrer Béatrice qui l'attend à 5 km de lui, au point B, hors de la route. Il décide de quitter sa bicyclette en un point P sur la route (voir figure) et de courir ensuite à pied, vers Béatrice. Sachant que Béatrice est à 3 km de la route et que la vitesse moyenne d'André à bicyclette est le double de sa vitesse moyenne à pieds, à quelle distance du point A, André doit-il quitter la route de façon à rejoindre Béatrice le plus tôt possible ?



Esquisse de solution :



En coordonnées cartésiennes, posons $A = (0,0)$, $P = (x,0)$, $B = (b,3)$. Comme $b^2 + 3^2 = 5^2$, on a $b = 4$ comme dans la figure.

Sans perte de généralité, on peut supposer que la vitesse moyenne d'André à bicyclette est 2 et sa vitesse à la course est 1. Le temps de parcours du trajet APB est

$$\begin{aligned} T &= \frac{x}{2} + \sqrt{(4-x)^2 + 3^2} \\ &= \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 - 8x + 25}. \end{aligned}$$

Il s'agit de résoudre l'équation

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

C'est-à-dire, $\frac{1}{2} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+25}} = 0$. On trouve, après calculs, $x = \overline{AP} = (4-\sqrt{3})$ km $\approx$ 2,268 km.

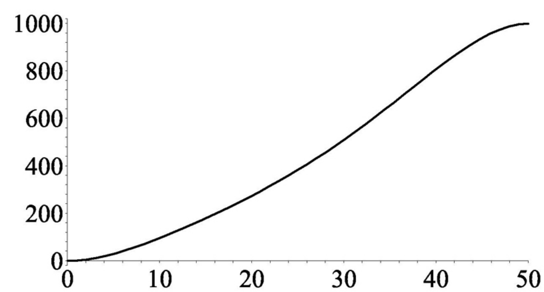
QUESTION 5 – Accélération – décélération

Partant du repos, avec une accélération initiale de 3 mètres/seconde^2 et s'arrêtant au bout de 50 secondes avec une décélération finale de 6 mètres/seconde^2, un véhicule a parcouru 1000 mètres. La courbe suivante donne la distance parcourue, en mètres, par le véhicule en fonction du temps écoulé, en secondes. Sachant que l'équation de cette courbe est

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5,$$

déterminer les valeurs de a, b, c, d.

Note : Une décélération de 6 mètres/seconde^2 équivaut à une accélération négative de -6 mètres/seconde^2.



Esquisse de solution :

Soit $p(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5$. La vitesse et l'accélération au temps x sont respectivement données par

$$p'(x) = 2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + 5dx^4$$

et

$$p''(x) = 2a + 6bx + 12cx^2 + 20dx^3.$$

Puisque $p(0) = 0$ et $p'(0) = 0$, les conditions du problème peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} p''(0) &= 3; \\ p(50) &= 1000; \\ p'(50) &= 0; \\ p''(50) &= -6. \end{aligned}$$

Ce qui fournit les 4 équations

$$\begin{gathered} 2a = 3 \\ 2\,500\,a + 125\,000\,b + 6\,250\,000\,c + 312\,500\,000\,d = 1\,000 \\ 100\,a + 7\,500\,b + 500\,000\,c + 31\,250\,000\,d = 0 \\ 2a + 300\,b + 30\,000\,c + 2\,500\,000\,d = -6. \end{gathered}$$

Simplifiant et résolvant, on trouve

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{7}{100}, \quad c = \frac{9}{5000}, \quad d = -\frac{21}{125\,000}$$

Ainsi,

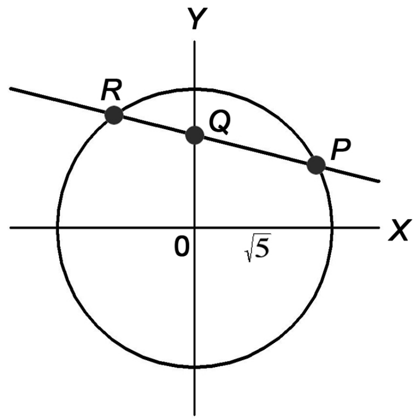
$$y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{100}x^3 + \frac{9}{5\,000}x^4 - \frac{21}{125\,000}x^5.$$

QUESTION 6 – Rationnalité circulaire

Un point du plan cartésien est dit rationnel si chacune de ses deux coordonnées est un nombre rationnel. Par exemple, le point $P = (2, 1)$ est rationnel, ainsi que le point $T = (-3/4, 2/3)$. Ça n'est pas le cas pour le point $U = (\sqrt{2}, 7/8)$ puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel. Considérons la circonférence (voir figure)

$$x^2 + y^2 = 5$$

dont le rayon est le nombre irrationnel $\sqrt{5}$. Cette circonférence contient pourtant le point rationnel $P = (2, 1)$ car $2^2 + 1^2 = 5$. Prouver que si Q est un point rationnel quelconque sur l'axe des y alors le point d'intersection R de la droite PQ avec la circonférence est aussi un point rationnel. En déduire le résultat surprenant suivant : la circonférence $x^2 + y^2 = 5$, de rayon irrationnel $\sqrt{5}$ contient une infinité de points rationnels !



Esquisse de solution :

Posons $Q = (0, u)$ où $u = m/n$ est un nombre rationnel. Puisque $P = (2, 1)$, la droite passant par PQ est donnée, après calculs par l'équation

$$y = u + \frac{1}{2}(1 - u)x.$$

En substituant cette valeur de y dans l'équation $x^2 + y^2 = 5$, on trouve, après calculs,

$$x = 2, \text{ ou } x = \frac{2(u^2 - 5)}{5 - 2u + u^2}.$$

Dans les deux cas, x est rationnel. Les valeurs de y correspondantes sont

$$y = 1 \text{ et } y = -\frac{5 - 10u + u^2}{5 - 2u + u^2}.$$

Ainsi, $(x, y) = R$ est rationnel. Finalement, puisqu'il existe une infinité de points rationnels $Q = (0, u)$ sur l'axe des y, il existe nécessairement une infinité de points rationnels R sur la circonférence.