Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau Collégial

Le vendredi, 11 février 2005, de 9h à 12h

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

QUESTION 1 – L'excellent tireur de la compétition

Durant une compétition, un tireur a réussi 50 tirs consécutifs de pistolet sur une cible carrée de 70 cm par 70 cm. Prouvez qu'au moins deux des centres des trous sur la cible sont à moins de 15 cm l'un de l'autre.

Esquisse de solution :
Subdivisons le carré 70 cm par 70 cm en 49 petits carrés de 10 cm par 10 cm. Comme il y a 50 trous sur la mire, au moins deux d'entre-eux tombent dans ou sur la frontière d'un même petit carré. Les milieux de ces deux trous sont à au plus $10\sqrt{2} = 14,142\ldots < 15$ cm l'un de l'autre.

QUESTION 2 – Identité trigonométrique à gogo

Démontrer la curieuse identité trigonométrique suivante :

$$3\sin^2(2\theta) + 4\sin^6(\theta) + 4\cos^6(\theta) = 4.$$

Esquisse de solution :
En posant $a = \sin^2\theta$ et $b = \cos^2\theta$ dans l'identité bien connue,

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\sin^6\theta + \cos^6\theta &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta) \\
&= \sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta, \qquad (1)
\end{aligned}$$

puisque $(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$.
Mais,

$$\begin{aligned}
\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&= 1 - \frac{3}{4}(2\sin\theta\cos\theta)^2 \\
&= 1 - \frac{3}{4}\cdot\sin^2(2\theta). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Combinant (1) et (2), on trouve $4\sin^6\theta + 4\cos^6\theta = 4 - 3\sin^2(2\theta)$.

QUESTION 3 – Le nombre irrationnel élevé à sa propre puissance

Soit x l'unique nombre réel satisfaisant les conditions

$$x^x = 2,\ x > 0.$$

Prouver que x est irrationnel (c'est-à-dire que x n'est pas de la forme m/n où m et n sont des entiers).

Esquisse de solution :
Par l'absurde. Supposons que $x = m/n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $m > 0$, $n > 0$ et que m et n n'ont pas de diviseurs commun (i.e. m/n est une fraction « simplifiée »).
On a successivement, $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} = 2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^m = 2^n \Rightarrow m^m = 2^n \cdot n^m \Rightarrow m = 2m_1$ (m pair).
Donc, $(2m_1)^{2m_1} = 2^n \cdot n^{2m_1} \Rightarrow 2^{2m_1}m_1^{2m_1} = 2^n n^{2m_1}$.
Mais, $m > n$ (sinon $x^x < 1$).
Donc $2m_1 > n$.
D'où $2^{2m_1 - n}m_1^{2m_1} = n^{2m_1}$.
Ce qui entraîne qu'on a aussi $n = 2n_1$ (n pair). Ainsi $m = 2m_1, n = 2n_1$, et la fraction m/n ne pouvait être simplifiée. Contradiction.

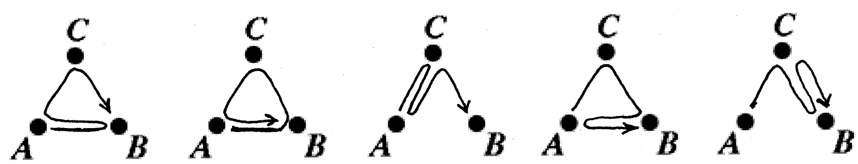
QUESTION 4 – Tellement de chemins !

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. Prouver que pour tout entier $n \geq 0$, il y a exactement

$$\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

chemins de longueur n allant de A à B en suivant les côtés de ce triangle.

Exemple : pour $n = 4$, il y a $\frac{2^4+(-1)^5}{3} = 5$ chemins de longueur 4 allant de A à B.
Les voici :



Esquisse de solution :

Soit

$$\begin{aligned} x_n &= \text{le nombre de chemins de longueur } n \text{ allant de } A \text{ à } B, \\ y_n &= \text{le nombre de chemins de longueur } n \text{ allant de } A \text{ à } C, \\ z_n &= \text{le nombre de chemins de longueur } n \text{ allant de } A \text{ à } A. \end{aligned}$$

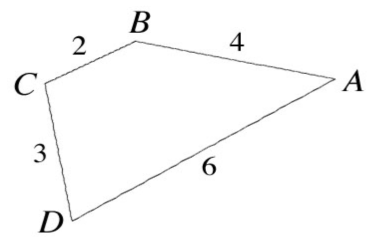
Alors, par symétrie, $x_n = y_n$. De plus

$$\left. \begin{array}{l} x_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{array} \right\} \text{donc} \left\{ \begin{array}{l} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2x_{n-1}; \end{array} \right.$$

donc $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$. D'autre part, $x_0 = 0 = \frac{2^0+(-1)^1}{3}, x_1 = 1 = \frac{2^1+(-1)^2}{3}$. Il suffit donc de vérifier que $\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}$ satisfait la récurrence, ce qui se fait par un simple calcul algébrique.

QUESTION 5 – Les côtés de l'heptagone

Par convention, nous dirons qu'un V dans un polygone est la figure formée par deux côtés adjacents du polygone. La longueur d'un V est définie par la somme des longueurs des côtés qui le composent. Par exemple, le quadrilatère $ABCD$



possède les quatre V successifs suivants ABC, BCD, CDA et DAB (obtenus en parcourant son périmètre) de longueurs respectives $6, 5, 9$ et 10. Déterminer la longueur de chaque côté d'un heptagone (= polygone ayant 7 côtés), sachant que les longueurs de ses V successifs sont 4, $\frac{9}{2}$, $\frac{5}{2}$, 4, $\frac{13}{2}$, 6, $\frac{9}{2}$.

Esquisse de solution :

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_7$ les longueurs des côtés successifs de l'heptagone. Il faut résoudre le système

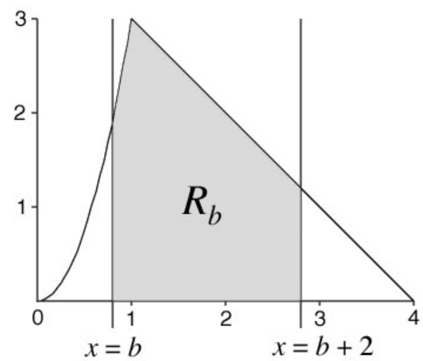
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 4 && (1)\\
x_2 + x_3 &= \frac{9}{2} && (2)\\
x_3 + x_4 &= \frac{5}{2} && (3)\\
x_4 + x_5 &= 4 && (4)\\
x_5 + x_6 &= \frac{13}{2} && (5)\\
x_6 + x_7 &= 6 && (6)\\
x_7 + x_1 &= \frac{9}{2} && (7)
\end{aligned}$$

Notons que $(1)-(2)+(3)-(4)+(5)-(6)$ fournit l'équation $x_1 - x_7 = -\frac{3}{2}$. En additionnant cette dernière équation et (7) on obtient $2x_1 = 3$, d'où $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 4 - x_1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, $x_3 = \frac{9}{2} - x_2 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$, $x_4 = \frac{5}{2} - x_3 = \frac{5}{2} - 2 = 1/2$, $x_5 = 4 - x_4 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, $x_6 = \frac{13}{2} - x_5 = \frac{13}{2} - \frac{7}{2} = 3$, $x_7 = 6 - x_5 = 6 - 3 = 3$. Ainsi, les côtés sont $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = \frac{7}{2}$, $x_6 = 3$, $x_7 = 3$.

QUESTION 6 – Maximisons l'aire

Soit $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 4-x & \text{pour} \quad 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Soit R_b la région bordée par le graphe $y = f(x)$, l'axe des x, la droite verticale $x = b$ et la droite verticale $x = b+2$, où $0 \leq b \leq 1$. Trouver la valeur de b qui maximise l'aire de la région R_b.



Esquisse de solution :

1) Soit $A(b)$ l'aire de la région R_b.

$$\begin{aligned}
A(b) &= \int_b^1 3x^2dx + \int_1^{2+b}(4-x)dx = \left[x^3\right]\Big|_b^1 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^{2+b} \\
&= 1 - b^3 + 4(2+b-1) - \frac{1}{2}\left((2+b)^2 - 1\right) \\
&= 1 - b^3 + 4 + 4b - \frac{1}{2}(3+4b+b^2) = \frac{7}{2} + 2b - \frac{b^2}{2} - b^3 \\
A'(b) &= 2 - b - 3b^2 = (-3b+2)(b+1);\ A''(b) = -1 - 6b
\end{aligned}$$

La dérivée s'annulle en $b = \frac{2}{3}$ (et $b = -1$), comme $A''\left(\frac{2}{3}\right) = -5 < 0$; le maximum est en $b = \frac{2}{3}$.

2) Lorsqu'on passe de b_0 à $b_0 + \triangle$, on perd un rectangle d'aire $3b_0^2 \cdot \triangle$ et on en gagne un d'air $(4-(b_0+2))\triangle = (2-b_0)\triangle$. L'aire $A(b)$ de la région R_b va donc augmenter tant que $3b^2 < 2-b$, puis atteindre son maximum lorsque $3b^2 = 2-b$, puis diminuer lorsque $3b^2 > 2-b$. Lorsqu'on résout : $3b^2 = 2-b$, on trouve $b = \frac{2}{3}$.