Concours de l'Association Mathématique du Québec

Niveau Collégial

Le vendredi, 6 février 2004, de 9h à 12h.

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note *: L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

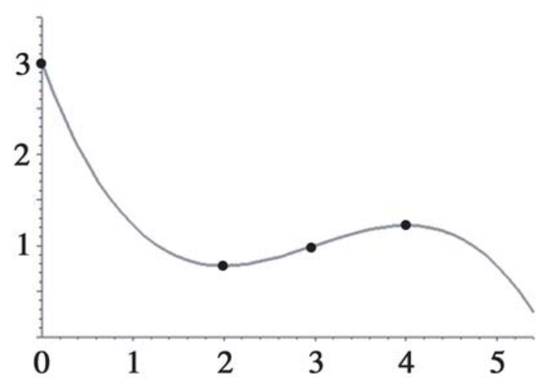
QUESTION 1 – Le polynôme du chimiste

Pour simuler adéquatement une expérience, un chimiste a besoin d'un polynôme du troisième degré,

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

possédant un minimum relatif en $x = 2$, un maximum relatif en $x = 4$ et passant par les points $(0, 3)$ et $(3, 1)$, (voir figure).

Quel est ce polynôme ?



Esquisse de solution

Les conditions $p(0) = 3, p'(2) = 0, p(3) = 1, p'(4) = 0$ correspondent au système d'équations

$$\begin{aligned} d &= 3 \\ 12a + 4b + c &= 0 \\ 27a + 9b + 3c + d &= 1 \\ 48a + 8b + c &= 0 \end{aligned}$$

Résolvant le système, on trouve $a = -\frac{1}{9}, b = 1, c = -\frac{8}{3}, d = 3$. Donc

$$p(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 - \frac{8}{3}x + 3.$$

QUESTION 2 – Le système d'équations tordues

Trouvez une solution du système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + x_2x_3x_4 &= 25 \\ x_2 + x_1x_3x_4 &= 10 \\ x_3 + x_1x_2x_4 &= 14 \\ x_4 + x_1x_2x_3 &= 11 \end{aligned}$$

sachant que $x_1 = 1$.

Esquisse de solution

Soit $P = x_1x_2x_3x_4$. Multipliant la i^e équation par x_i, pour $i = 1, 2, 3, 4$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1^2 + P &= 25x_1 \quad (1) \\ x_2^2 + P &= 10x_2 \quad (2) \\ x_3^2 + P &= 14x_3 \quad (3) \\ x_4^2 + P &= 11x_4 \quad (4) \end{aligned}$$

Ainsi, $P = 24$ car $x_1 = 1$. En substituant dans (2),(3),(4) on trouve $x_2^2 - 10x_2 + 24 = 0$, $x_3^2 - 14x_3 + 24 = 0$, $x_4^2 - 11x_4 + 24 = 0$. En résolvant ces équations, on trouve 8 solutions (x_2, x_3, x_4) ; soient $x_2 = 4$ ou 6, $x_3 = 2$ ou 12, et $x_4 = 3$ ou 8. La seule qui satisfait $x_1x_2x_3x_4 = 24$ est $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 3$.

QUESTION 3 – Une question d'irrationnalité

Considérons l'équation $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$, pour des valeurs de t réelles strictement positives.

a) Montrez qu'aucun polynôme $y(t)$ ne peut satisfaire cette équation.

b) Montrez qu'aucune fonction rationnelle $y(t)$, c'est-à-dire $y(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ où $f(t), g(t)$ sont des polynômes, ne peut satisfaire cette équation.

Esquisse de solution

a) La dérivée d'un polynôme est un polynôme et $\frac{1}{t}$ n'est pas un polynôme.

b) Supposons $y(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ une fonction rationnelle sous forme irréductible, telles que $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$.
Disons $g(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$, et $f(t) = bt^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_0$, deux polynômes premiers entre eux, i.e. sans facteur commun.
On obtient

$$\frac{\frac{df}{dt}g - f\frac{dg}{dt}}{g^2} = \frac{1}{t}$$

D'où

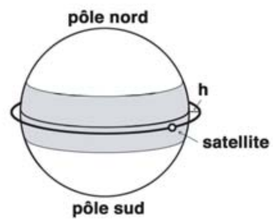
$$\begin{aligned} t\left(\frac{df}{dt}g - f\frac{dg}{dt}\right) &= g^2 \\ t((bmt^{m-1} + \ldots + b_1)(t^n + \ldots + a_0) & \\ -(bt^m + \ldots + b_0)(nt^{n-1} + \ldots + a_1)) &= t^{2n} + \ldots \\ t(b(m-n)t^{m+n-1} + \ldots) &= t^{2n} + \ldots \\ b(m-n)t^{m+n} + \ldots &= t^{2n} + \ldots \end{aligned}$$

En comparant les degrés on aurait : si $m - n \neq 0$ alors $m + n = 2n$ et $m = n$ ce qui est exclu, mais si $m - n = 0$ alors $m = n$ et les degrés ne peuvent être égaux ce qui ne pourrait être le cas non plus.
Ainsi aucune fonction rationnelle ne peut satisfaire l'équation.
N.B. Cette équation définit la fonction logarithmique.

QUESTION 4 – Le satellite autour de l'équateur

Un satellite météorologique fait plusieurs fois par jour le tour de la Terre en restant dans le plan de l'équateur. Son orbite est un cercle dont le centre est le centre de la Terre. À quelle distance h, par rapport au sol, le satellite doit-il être de façon à ce que l'anneau des points visibles sur la Terre (zône grise sur la figure) à partir du satellite ait une aire de 30% de celle de la Terre.

Note : On suppose que la Terre est une sphère de rayon R et on demande d'exprimer la réponse sous la forme $h = kR$ où k est un nombre à déterminer.



Esquisse de solution

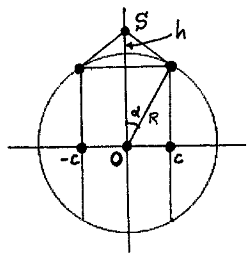
L'aire d'une surface de révolution pour la courbe $y = f(x)$ tournant autour de l'axe des x pour x allant de a à b est

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Pour $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, a = -c, b = c$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ donc, l'aire de la couronne des points visibles est

$$\begin{aligned} & 2\pi \int_{-c}^{c} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\; dx \\ = \quad & 2\pi \int_{-c}^{c} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}dx = 4\pi RC. \end{aligned}$$

On veut donc $\dfrac{4\pi RC}{4\pi R^2} = \dfrac{3}{10}$ c'est-à-dire $\dfrac{C}{R} = \dfrac{3}{10}$.



D'après la figure (où S est le satellite) on a $\dfrac{3}{10} = \dfrac{C}{R} = \sin\alpha$. Mais

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{R}{R+kR} = \frac{1}{1+k}$$

Donc $\dfrac{1}{1+k} = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{10}\right)^2}$. D'où l'on tire $k = \dfrac{10\sqrt{91}-91}{91}$.

QUESTION 5 – Mise en plis à s'arracher les cheveux

Plions en deux une feuille de papier rectangulaire infiniment mince, soit selon un pli horizontal, soit selon un pli vertical. Répétons ceci un certain nombre de fois toujours en pliant en deux au choix et indépendamment des plis précédents soit selon un pli horizontal, soit selon un pli vertical. Nous obtenons ainsi un rectangle de papier plié. Avec une paire de ciseaux, coupons en deux ce rectangle au choix et indépendamment des plis effectués précédemment, soit selon une coupure horizontale, soit une coupure verticale.

Pour illustrer cette expérience, si nous plions premièrement selon un pli vertical et ensuite selon un pli horizontal, nous aurons après avoir coupé horizontalement notre rectangle, trois morceaux de papier. Par contre, si nous plions trois fois selon des plis verticaux et coupons ensuite notre rectangle verticalement, nous aurons neuf morceaux de papier.

a) Peut-on obtenir à l'aide de cette expérience exactement 100 morceaux de papier ? Si oui, expliquez comment ? Si non, expliquez pourquoi ?

b) Peut-on obtenir à l'aide de cette expérience exactement 1025 morceaux de papier ? Si oui, expliquez comment ? Si non, expliquez aussi pourquoi ?

Esquisse de solution

À chaque fois que nous plions la feuille de papier selon un pli vertical et que nous regardons les bandes verticales de papier que séparent les plis verticaux ainsi formés, celles-ci doublent. Ces bandes verticales ne sont pas modifiées lorsque nous plions le rectangle selon un pli horizontal. Conséquemment si nous plions au cours de notre expérience le rectangle v fois selon des plis verticaux, alors il y aura 2^v bandes verticales de papier que séparent les plis verticaux ainsi formés.

De même, si nous plions au cours de notre expérience le rectangle h fois selon des plis horizontaux, alors il y aura 2^h bandes horizontales de papier que séparent les plis horizontaux ainsi formés.

Maintenant, si nous coupons verticalement notre rectangle de papier plié, cette opération correspondra à couper chacune des bandes verticales que séparent les plis verticaux formés par notre expérience en deux. Il y aura donc $2^v + 1$ morceaux de papier. Similairement, si nous coupons horizontalement notre rectangle de papier plié, cette opération correspondra à couper chacune des bandes horizontales que séparent les plis horizontaux formés par notre expérience en deux. Il y aura donc $2^h + 1$ morceaux de papier.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre aux deux questions.

Pour

a) nous ne pourrons jamais avoir 100 morceaux de papier parce que 100 n'est pas de la forme $2^n + 1$.

   Pour

b) il est possible d'obtenir 1025 morceaux de papier car $1025 = 2^{10} + 1$. Par exemple, si nous plions dix fois selon des plis verticaux et coupons ensuite notre rectangle verticalement, nous aurons 1025 morceaux de papier.

QUESTION 6 – Une belle décomposition en facteurs

Décomposez complètement en facteurs l'expression

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3).$$

Esquisse de solution

En développant, on obtient successivement,

$$\begin{aligned}
3(ac^2+bc^2+a^2c+b^2c+a^2b+ab^2+2abc) &= 3\left[(a+b)c^2+(a+b)^2c+(a+b)ab\right] \\
&= 3(a+b)\left[c^2+(a+b)c+ab\right] \\
&= 3(a+b)(c+a)(c+b).
\end{aligned}$$