Solutionnaire

Concours de l'Association Mathématique du Québec

Niveau Collégial

Le vendredi, 7 février 2003, de 9h à 12h.

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note *: L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

QUESTION 1 – L'inverse de l'année

Il est bien connu que $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Déterminer deux nombres entiers positifs distincts m et n satisfaisant $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2003}$.

Esquisse de solution

On a successivement,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2003} \\
&\Leftrightarrow \frac{m+n}{mn} = \frac{1}{2003} \\
&\Leftrightarrow mn - 2003(m+n) = 0 \\
&\Leftrightarrow mn - 2003(m+n) + 2003^2 = 2003^2 \\
&\Leftrightarrow (m-2003)(n-2003) = 2003^2.
\end{aligned}$$

Puisque 2003 est un nombre premier, on peut choisir $m - 2003 = 1, n - 2003 = 2003^2$. Ainsi $m = 2004$ et $n = 2003 + 2003^2 = 4014012$, constituent une solution.

QUESTION 2 – Les sommets des paraboles

Dans une étude de trajectoires en aéronautique, on doit décrire la courbe parcourue par le sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c, a > 0$ lorsque b varie. Quelle est cette courbe ?

Esquisse de solution

Si (h, k) est ce sommet, la parabole a pour équation

$$a(x-h)^2 + k = ax^2 + bx + c.$$

D'où l'on tire,

$$b = -2ah \text{ et } c = k + ah^2.$$

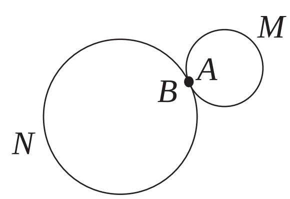
Par conséquent

$$k = c - ah^2.$$

Ce qui montre que le lieu cherché est une parabole de sommet $(0, c)$ et d'équation $k = c - ah^2$.

QUESTION 3 – Cercles en rotation

Soient M et N des cercles de rayons respectifs m et n (des entiers ≥ 1). Supposons le cercle M tourne sans glisser autour du cercle N (voir figure) jusqu'à ce que le point A de M retourne sur le point B de N. Combien de tours, autour de son centre, le cercle M aura-t'il fait ?



Esquisse de solution

Les circonférences sont de $2\pi m$ et $2\pi n$. Soit k le plus petit commun multiple de m et n, $k = ppcm(m, n)$. On a alors que $\frac{k}{m}$ et $\frac{k}{n}$ sont des entiers et $2\pi m\frac{k}{m} = 2\pi k = 2\pi n\frac{k}{n}$. Le point A revient sur le point B lorsque le cercle M tourne $\frac{k}{n}$ fois autour de N et le point A revient $\frac{k}{m}$ fois sur le cercle N.
Un moment de réflexion montre que M aura tourné $\frac{k}{m} + \frac{k}{n}$ fois autour de son centre. Comme $k = \frac{mn}{pgcd(m,n)}$ où $pgcd(m, n)$ désigne le plus grand commun diviseur de m et n, l'expression peut aussi s'écrire $\frac{(m+n)}{pgcd(m,n)}$.

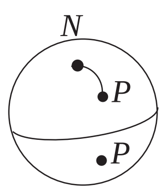
Exemple Si M est de rayon 8 et N est de rayon 28, alors $pgcd(8, 28) = 4, ppcm(8, 28) = 56$. Le petit cercle M, doit tourner $\frac{56}{8} = 7$ fois «sur lui-même» et $\frac{56}{28} = 2$ fois «autour de N». Il fait alors $7 + 2 = 9$ rotations de $360°$ autour de son centre. Vérifiez avec de vrais cercles de carton !

QUESTION 4 – Deux points sur la terre

Quelle est, en moyenne, la distance terrestre entre deux points choisis complètement au hasard sur la surface de la Terre ?

Notes On suppose que la Terre est une sphère parfaite de rayon R et il s'agit d'exprimer la réponse en fonction de R.
La distance terrestre entre deux points est la longueur minimum d'un arc joignant ces deux points tracé sur la surface de la terre (arc de «grand cercle»).

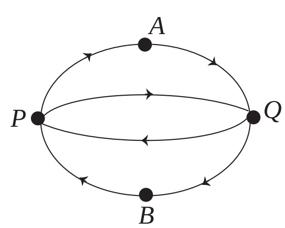
Esquisse de solution



Soient N et P ces deux points aléatoires. Sans perte de généralité, on peut supposer que N est le pôle nord. Comme il est autant probable que P soit situé au nord de l'équateur qu'au sud de l'équateur, la moyenne cherchée est égale à la distance terrestre entre le pôle nord et l'équateur. C'est-à-dire, $\frac{1}{4}$ de la circonférence $2\pi R$ de la Terre. La moyenne cherchée est donc $\frac{\pi}{2}R$.

QUESTION 5 – Voyager par plus de quatre chemins

Combien peut-on tracer de chemins de P à Q en mettant bout-à-bout 12 flèches successives dans la figure suivante ?



Exemple : $PAQPQPQBPAQPQ$ est un tel chemin.

Esquisse de solution

Posons, pour $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} q_n &= \text{nombre de chemins de } P \text{ à } Q \text{ ayant } n \text{ flèches},\\ a_n &= \text{nombre de chemins de } P \text{ à } A \text{ ayant } n \text{ flèches},\\ b_n &= \text{nombre de chemins de } P \text{ à } B \text{ ayant } n \text{ flèches},\\ p_n &= \text{nombre de chemins de } P \text{ à } P \text{ ayant } n \text{ flèches}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} q_n &= a_{n-1} + p_{n-1} && (1) \\ a_n &= p_{n-1} && (2) \\ b_n &= q_{n-1} && (3) \\ p_n &= b_{n-1} + q_{n-1} && (4) \end{aligned}$$

Par (1) et (2) on trouve

$$q_n = p_{n-2} + p_{n-1} \qquad (5)$$

Par (3) et (4) on a

$$p_n = q_{n-2} + q_{n-1} \qquad (6)$$

Par (5) et (6) on a

$$q_n = q_{n-2} + 2q_{n-3} + q_{n-4} \text{ pour } n \geq 4 \qquad (*)$$

Mais $q_0 = 0, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1$. De proche en proche $(*)$, on trouve $q_{12} = 116$.

Remarque. En ajoutant (5) à (6) on découvre que $T_n = p_n + q_n$ satisfait $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ avec $T_0 = T_1 = 1$. C'est dire que T_n est le n^{e} nombre de Fibbonacci F_n ;

$$(F_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Une étude plus complète conduit à :

$$q_n = \begin{cases} (F_n - 1)/2 & \text{si} \quad n \equiv 0 \pmod 3 \\ (F_n + 1)/2 & \text{si} \quad n \equiv 1 \pmod 3 \\ F_n/2 & \text{si} \quad n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

QUESTION 6 – Curieuse factorisation

Dans une recherche, un expert en communications électroniques doit trouver deux polynômes non constants $p(x)$ et $q(x)$ dont les coefficients sont $0, 1$ ou -1 et qui satisfont

$$x^8 - x + 1 = p(x)q(x).$$

Existe-t'il de tels polynômes ? Si oui quels sont-ils ? Sinon, pourquoi ?

Esquisse de solution

Il est facile de vérifier que $p(x)$ ne peut pas être un polynôme de degré 1, c'est-à-dire, de la forme

$$x, \ x+1, \ x-1, \ -x, \ -x+1, \ -x-1.$$

Essayons de trouver $p(x)$ de degré 2. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta \text{ où } \left[\begin{array}{l} \alpha = 0, -1, +1 \\ \beta = -1, +1 \end{array} \right.$$

car $\beta = 0$ est impossible. La valeur $\alpha = 0$ est aussi impossible car en essayant de diviser par $x^2 + \beta$ on trouve un reste non nul. En essayant $\alpha = -1, \beta = -1$ on trouve encore un reste non nul, essayant $\alpha = -1, \beta = 1$, on trouve, après division

$$x^8 - x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1).$$

Ainsi $p(x) = (x^2 - x + 1), q(x) = x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1.$

UQAM
Département de mathématiques