UQAM
Département de mathématiques

2000

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

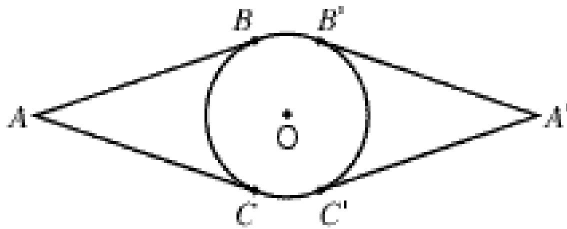
NIVEAU COLLÉGIAL

SOLUTIONNAIRE

QUESTION 1

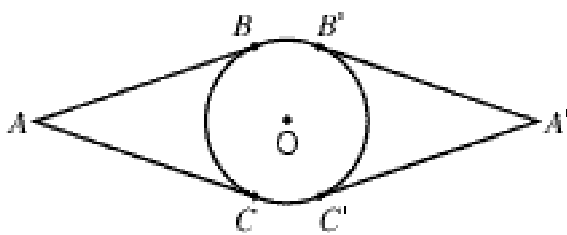
QUESTION 1 (*L'oeil de Pythagore*)

Un «oeil» a la forme suivante :



où AB, AC, $A'B'$, $A'C'$ sont tangents au cercles $BB'C'C$ de centre O. Les points A, O et A' sont alignés. Sachant que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{A'B'} = \overline{A'C'}$ = 1cm et que l'aire du cercle est de $\pi/4$ cm^2, déterminer la distance entre les points A et A'.

QUESTION 1 - Solution proposée



Soit r le rayon du cercle. On a $\pi r^2 = \pi/4$ donc $r = 1/2$. Ainsi

$$\overline{AA'} = \overline{AO} + \overline{OA'} = 2\overline{AO} = 2\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2} = 2\sqrt{1+r^2} = 2\sqrt{1+1/4} = 2\sqrt{5/4} = \sqrt{5} \text{ cm} .$$

***QUESTION* 2 (*Les Dupont reçoivent*)**

Monsieur et Madame Dupont reçoivent cinq couples pour une soirée mondaine. Les gens se retrouvent et se serrent la main, sauf bien sûr entre conjoints. Juste avant de passer à table, Madame Dupont, qui est très observatrice, constate que les onze personnes autres que son mari (c'est-à-dire elle-même et les 10 invités) ont toutes serré la main d'un nombre différent de personnes. En déduire logiquement le nombre de personnes à qui Monsieur Dupont a serré la main et à qui Madame Dupont a serré la main.

QUESTION 2 - Solution proposée

Appelons P_i, $i = 0,1,2,\ldots,10$, la personne qui a serré la main de i personnes. Comme personne ne se serre soi-même la main et ne serre la main de son conjoint, ceci est possible. P_{10} ne peut pas être madame Dupont car elle aurait serré la main des 10 invités dont aucun n'aurait serré zéro main. De plus P_0 est le (la) conjoint(e) de P_{10}. De même P_9 n'est pas madame Dupont car elle aurait serré la main de $P_1, P_2, \ldots, P_8, P_{10}$ et P_1 aurait serré 2 mains ! P_1 est conjoint de P_9. De façon semblable P_8 et P_2, P_7 et P_3, P_6 et P_4 sont les trois autres couples d'invités. Madame Dupont est P_5 et monsieur Dupont a aussi serré 5 mains.

***QUESTION* 3 (*Quel est le produit ?*)**

À partir du système d'équations suivant

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 7 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 15, \end{aligned}$$

déterminer la valeur du produit xyz.

Note : Pour résoudre ce problème, il n'est pas nécessaire de calculer la valeur individuelle de chacune des inconnues x, y, et z.

QUESTION 3 - Solution proposée

Puisque le produit est du 3e degré en $x,\ y,\ z$, on est porté à manipuler les 3 équations pour produire des termes du 3e degré. Cubant la première équation, on trouve

A) $$x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3x^2z+3xz^2+6xyz=27\,.$$

En multipliant la première par la deuxième équation, on obtient

B) $$x^3+y^3+z^3+x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2=21\,.$$

Laissons la troisième équation inchangée

C) $$x^3+y^3+z^3=15\,.$$

En calculant (A) - 3(B) on fait disparaître les termes mixtes du type $x^2y,\ xy^2$, etc et on obtient

$$-2\left(x^3+y^3+z^3\right)+6xyz=27-63=-36$$

Donc

$$\begin{aligned}6xyz&=-36+30\\&=-6\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$xyz = -1.$$

QUESTION 4 (Le jeu du Klékling-Kléklang)

Pierrot s'amuse avec ses petits dinosaures-jouets en plastique. Il fait des *combats* entre ses bestioles, prises 2 à 2. Il se prépare à faire un combat entre la bestiole B_1 (un petit tricératops) et la bestiole B_2 (un petit tyrannosaure).

Les règles du jeu sont les suivantes : les deux bestioles sont lancées en l'air, simultanément, et retombent sur le plancher. Chaque bestiole peut retomber **debout** ou **couchée**. Quand une bestiole tombe debout, elle mérite un point. Le vainqueur est le premier à être tombé 2 fois debout, si l'adversaire n'a pas encore réussi à tomber 1 fois debout. Il s'agit donc d'une course au premier qui accumule deux points (avec la convention qu'un score de 2 à 1, de 1 à 2 ou de 1 à 1 correspond à un *match nul*).

Si on suppose que B_1 tombe debout, en moyenne, une fois sur trois lancers et que B_2 tombe debout, en moyenne, une fois sur quatre lancers, évaluer les trois probabilités suivantes :

$$P\left(B_1 \text{ gagne}\right),\quad P\left(B_2 \text{ gagne}\right) \quad \text{et} \quad P(\text{match nul})\,.$$

Note : Le nom du jeu vient du bruit que ça fait quand on y joue.

QUESTION 4 - Solution proposée

Chaque fois que les deux bestioles B_1 et B_2 sont (simultanément) lancées, il y a quatre résultats possibles. Le tableau qui suit indique les probabilités de ces quatre cas :

	B_2 tombe debout	B_2 tombe couchée	
B_1 tombe debout	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{3}$
B_1 tombe couchée	$\frac{2}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

L'état courant du «combat» est caractérisé par le couple (i, j), où i et j désignent respectivement les nombres de fois que B_1 et B_2 sont tombés debout. En début de partie, on est dans l'état (0,0). L'état (2,0) correspond à une victoire de B_1. L'état (0,2) correspond à une victoire de B_2. Les états (1,1), (2,1) et (1,2) correspondent à un match nul. Les autres états, (0,0), (0,1), (1,0) sont des états transitoires : le gagnant n'a pas encore été décidé.

Quand deux bestioles tombent couchées, il n'y a pas de progrès dans le déroulement du combat : on reste dans l'état (i, j) où on était auparavant. Il y aura progrès (vers l'un des états $(i+1, j)$, $(i, j+1)$ ou $(i+1, j+1)$) seulement si au moins une des deux bestioles tombe debout. Sous la condition qu'au moins une des deux bestioles tombe debout, il y a trois résultats possible (plutôt que quatre) et les probabilités conditionnelles de ces cas sont celles du nouveau tableau suivant :

	B_2 tombe debout	B_2 tombe couchée
B_1 tombe debout	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
B_1 tombe couchée	$\frac{2}{6}$	

Chaque fois qu'il y aura progrès dans le déroulement du combat, l'état qui succédera à l'état $(i,\ j)$ sera donc l'un ou l'autre des états $(i+1,\ j)$, $(i,\ j+1)$ ou $(i+1,\ j+1)$ avec, respectivement, des probabilités égales à $3/6$, $2/6$ et $1/6$. Notons par $p(i,\ j)$ le triplet dont les trois composantes désignent les probabilités, partant de l'état $(i,\ j)$, que le combat se termine par une victoire de B_1, une victoire de B_2 ou un match nul respectivement. On a $p(2,0) = (1,0,0)$, $p(0,2) = (0,1,0)$, $p(2,1) = (0, 0, 1)$, $p(1, 2) = (0, 0, 1)$, $p(1, 1) = (0, 0, 1)$. D'où :

$$p(1,0) = \frac{3}{6}p(2,0) + \frac{2}{6}p(1,1) + \frac{1}{6}p(2,1) = \frac{3}{6}(1,0,0) + \frac{2}{6}(0,0,1) + \frac{1}{6}(0,0,1) = \left(\frac{3}{6}, 0, \frac{3}{6}\right)$$

$$p(0,1) = \frac{3}{6}p(1,1) + \frac{2}{6}p(0,2) + \frac{1}{6}p(1,2) = \frac{3}{6}(0,0,1) + \frac{2}{6}(0,1,0) + \frac{1}{6}(0,0,1) = \left(0, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right)$$

$$p(0,0) = \frac{3}{6}p(1,0) + \frac{2}{6}p(0,1) + \frac{1}{6}p(1,1) = \frac{3}{6}\left(\frac{3}{6}, 0, \frac{3}{6}\right) + \frac{2}{6}\left(0, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right) + \frac{1}{6}(0,0,1) = \left(\frac{9}{36}, \frac{4}{36}, \frac{23}{36}\right).$$

Donc, $P(B_1 \text{ gagne}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $P(B_2 \text{ gagne}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(\text{match nul}) = \frac{23}{36} \approx 0.638889$.

***QUESTION* 5 (*Le jeu de la chaise musicale mathématique*)**

Au départ du jeu, nous avons une suite de nombres : $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ \dots\ \le a_{2n} \le a_{2n+1}$ ayant un nombre impair d'entrées. À chaque étape du jeu, nous remplaçons trois nombres consécutifs choisis au hasard dans cette suite, disons $a_i \le a_{i+1} \le a_{i+2}$, par le nombre $(a_i + a_{i+2} - a_{i+1})$ de façon à obtenir une nouvelle suite ayant deux termes de moins que la précédente. Il y a plusieurs façon de choisir ces trois nombres consécutifs. Nous répétons ceci jusqu'à ce qu'il ne nous reste plus qu'un nombre que nous déclarerons être le vainqueur. Par exemple, 4 est le vainqueur du jeu suivant :

$$1 \le 2 \le \underline{3 \le 4 \le 5} \le 6 \le 7 \qquad 1 \le 2 \le \underline{4 \le 6 \le 7} \qquad \underline{1 \le 2 \le 5} \qquad 4$$

dans lequel nous avons souligné à chaque fois les trois entiers consécutifs choisis.

a) Si nous commençons le jeu avec la suite composée des entiers de 1 à 1 000 001, est-ce que le nombre 2000 peut être un nombre vainqueur d'un jeu ?

b) Déterminer l'ensemble de tous les nombres vainqueurs possibles d'un jeu si nous commençons avec la suite composée des entiers de 1 à 1 000 001.

QUESTION 5 - Solution proposée

a) Si nous considérons une suite $\sigma\ :\ a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{2n} \le a_{2n+1}$ apparaissant à une étape du jeu et la suite $\sigma'\ :\ a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{i-1} \le \left(a_i + a_{i+2} - a_{i+1}\right) \le a_{i+3} \le\ \ldots\ \le a_{2n} \le a_{2n+1}$ apparaissant à l'étape suivante, alors la somme S des entrées de σ, c'est-à-dire $S = a_1 + a_2 +\ \ldots\ + a_{2n+1}$, a la même parité que la somme S' des entrées de σ', c'est-à-dire $S' = a_1 + a_2 +\ \ldots\ + a_{i-1} + \left(a_i + a_{i+2} - a_{i+1}\right) + a_{i+3} +\ \ldots\ + a_{2n} + a_{2n+1}$. En effet, $S' = S - 2a_{i+1}$. Comme la somme des entiers de 1 à 1 000 001 est (1 000 001) (500 001) et que ce nombre est impair, alors un vainqueur du jeu doit nécessairement être un nombre impair à cause de la remarque ci-dessus. Donc le nombre 2000 ne peut pas être un vainqueur du jeu.

b) Si nous considérons une suite $\sigma\ :\ a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{2n} \le a_{2n+1}$ apparaissant à une étape du jeu et la suite $\sigma'\ :\ a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots\ a_{i-1} \le \left(a_i + a_{i+2} - a_{i+1}\right) \le a_{i+3} \le \ldots \le a_{2n} \le a_{2n+1}$ apparaissant à l'étape suivante, alors la somme alternée A des entrées de σ, c'est-à-dire $A = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{k-1} a_k + \ldots - a_{2n} + a_{2n+1}$ est égale à la somme alternée A' des entrées de σ', c'est-à-dire $A' = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{i-2} a_{i-1} + (-1)^{i-1}\left(a_i + a_{i+2} - a_{i+1}\right) + (-1)^i a_{i+3} + \ldots + (-1)^{2n-3} a_{2n} + (-1)^{2n-2} a_{2n+1}$. En effet, nous avons que $A' = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{i-2} a_{i-1} + (-1)^{i-1} a_i + (-1)^i a_{i+1} + (-1)^{i-1} a_{i+2} + (-1)^i a_{i+3} + \ldots + (-1)^{2n-3} a_{2n} + (-1)^{2n-2} a_{2n+1} = A$. Comme la somme alternée des entiers de 1 à 1 000 001 est 1 - 2 + 3 - 4 + … − 1 000 000 + 1 000 001 = −500 000 + ç1 000 001 = 500 001. Il y a donc un seul nombre vainqueur possible, soit 500 001.

***QUESTION* 6 (*Minimisation avec racines carrées*)**

Déterminer la valeur de $x > 1$ qui minimise l'expression

$$4\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

Note : On ne considère que les valeurs positives des radicaux.

QUESTION 6 - Solution proposée

Posons $f(x) = 4\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$. On a $f(1) = 4 - \sqrt{2} > 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Cherchons la ou les valeurs de $x > 1$ telles que $f'(x) = 0$. On a $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 0$. Ce qui équivaut à

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x}},\ x > 1.$$

Élevant au carré, on trouve

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{x+1}\ \sqrt{x-1}} + \frac{1}{x-1} = \frac{16}{x},\ x > 1.$$

C'est-à-dire

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{16}{x},\ x > 1.$$

ou encore,

$$\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{8}{x},\ x > 1.$$

En multipliant par x, on trouve

$$\frac{x^2}{x^2-1} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = 8.$$

Posant $t^2 = \frac{x^2}{x^2-1} > 0$, on a

$$t^2 + t - 8 = 0$$

D'où

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-8)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Seule la valeur $t = \frac{\sqrt{33}-1}{2} > 0$ est à retenir. Notons que $t^2 = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$. Mais $\frac{x^2}{x^2-1} = t^2$. D'où $x^2 = t^2\left(x^2-1\right) = t^2x^2 - t^2$. Ainsi

$$x^2 = \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{\frac{17-\sqrt{33}}{2}}{\frac{17-\sqrt{33}}{2}-1} = \frac{17-\sqrt{33}}{15-\sqrt{33}}.$$

$$= \frac{\left(17-\sqrt{33}\right)\left(15+\sqrt{33}\right)}{15^2-33} = \frac{222+2\sqrt{33}}{192} = \frac{111+\sqrt{33}}{96}$$

$$x = \sqrt{\frac{111+\sqrt{33}}{96}} = \sqrt{111+\sqrt{33}}\Big/4\sqrt{6}$$

AUTRE SOLUTION :

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = 0$$

$$4\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+x}$$

$$16\left(x^2-1\right) = x^2 - x + 2x\sqrt{x^2-1} + x^2 + x$$

$$16x^2 - 16 = 2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1}$$

$$14x^2 - 16 = 2x\sqrt{x^2-1}$$

$$\left(7x^2-8\right)^2 = x^2\left(x^2-1\right)$$

$$49x^4 - 112x^2 + 64 = x^4 - x^2$$

$$48x^4 - 111x^2 + 64 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{111 \pm \sqrt{33}}{96}}$$

Il reste à étudier les deux valeurs positives >1.

$$\sqrt{\frac{111 + \sqrt{33}}{96}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{111 - \sqrt{33}}{96}}$$

(Mais la seconde a été introduite en élevant au carré)