

1999

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

NIVEAU COLLÉGIAL

SOLUTIONNAIRE

QUESTION 1

(Les entiers faiblement répétitifs)

Un nombre entier positif est dit faiblement répétitif si aucun de ses chiffres n'apparaît plus de deux fois dans son écriture décimale. Par exemple, 387 et 467648 sont faiblement répétitifs tandis que 1999 ne l'est pas. Combien d'entiers sont faiblement répétitifs parmi les nombres de 1 à 100000 ?

QUESTION 1

SOLUTION PROPOSÉE

Notons l'ensemble des entiers qui ne sont pas faiblement répétitifs et qui ont i chiffres dans leur écriture décimale par E_i .

Nous avons que le nombre d'entiers faiblement répétitifs parmi les nombres de 1 à 100000 sera

$$(*) \quad 100000 - \left(\left| \bigcup_{i=1}^5 E_i \right| + 1 \right) \text{ où } |X| \text{ signifie la cardinalité de l'ensemble } X.$$

Noter qu'il faut exclure 100000 car 100000 n'est pas faiblement répétitif et ceci explique qu'il faille soustraire 1 dans la formule (*).

Les ensembles E_i sont disjoints. Conséquemment $\left| \bigcup_{i=1}^5 E_i \right| = |E_1| + |E_2| + |E_3| + |E_4| + |E_5|$

$E_1 = \emptyset$ et $E_2 = \emptyset$ car il faut au moins 3 chiffres dans l'écriture décimale d'un entier non faiblement répétitif. Donc $|E_1| = |E_2| = 0$.

E_3 sera l'ensemble des entiers dont l'écriture décimale est de la forme aaa avec $a \neq 0$. Donc $|E_3| = 9$.