Département de mathématiques, UQAM

1998

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

NIVEAU COLLÉGIAL

SOLUTIONNAIRE

QUESTION **1** (*Les carrés parfaits inattendus)*

Démontrer que lorsque l'on ajoute 1 au produit de quatre nombres entiers consécutifs, on obtient *toujours* un carré parfait. Exemple : $1\ \ 2\ \ 3\ \ 4+1=25=5^2$, $\ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6+1=361=19^2$.

SOLUTION PROPOSÉE

En développant et factorisant, on trouve

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n^4+6n^3+11n^2+6n+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2. \end{aligned}$$

On obtient donc un carré parfait si n est un entier.

<u>Note</u> : Pour trouver cette factorisation, on peut essayer $(n^2+kn+1)^2$ avec k indéterminé.

On trouve

$$\begin{aligned} (n^2+kn+1)^2 &= n^4+2kn^3+(k^2+2)n^2+2kn+1 \\ &= n^4+6n^3+11n^2+6n+1. \end{aligned}$$

On voit alors que $k=3$ satisfait la condition.

On peut aussi écrire : $n(n+3)\ \ (n+1)(n+2)=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=(x-1)(x+1)=x^2-1$ avec $x=n^2+3n+1$.

QUESTION 2 (L'inégalité mystérieuse)

Démontrer que pour tous nombres réels $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ l'inégalité suivante est satisfaite

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

SOLUTION PROPOSÉE

Si $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$, alors

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3} \iff \frac{ab+bc+ca}{3} \leq \frac{a^2+b^2c^2+2ab+2bc+2ca}{9}$$

$$\iff a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3ab+3bc+3ca$$

$$\iff a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Mais $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ est toujours vraie et entraîne justement que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ par un simple développement du membre de gauche puis en divisant par 2.

QUESTION* 3 (*Les deux tangentes à une parabole)

Deux tangentes à une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ se rencontrent au point (6,1) du plan cartésien. Sachant que les points de contact de ces tangentes avec la parabole sont (4,3) et (8,7), déterminer l'équation exacte de cette parabole (c.-à-d., déterminer les valeurs numériques des constantes a, b et c).

SOLUTION PROPOSÉE

Posons $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $f'(x) = 2ax + b$. Soient A : (4,3), B : (8,7), C :(6,1). Alors

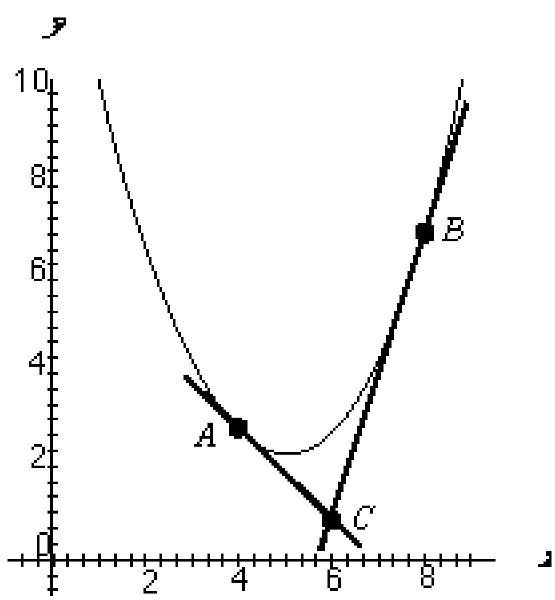
pente de $AC = \dfrac{1-3}{6-4} = \dfrac{-2}{2} = -1 = f'(4) = 8a + b$,

pente de $CB = \dfrac{7-1}{8-6} = \dfrac{6}{2} = 3 = f'(8) = 16a + b$.

On a donc $8a + b = -1$ et $16a + b = 3$, ce qui donne: $a = \dfrac{1}{2}, b = -5$.

Puisque avec $3 = f(4) = 16a + 4b + c = 8 - 20 + c = -12 + c$, on trouve $c = 15$.

L'équation de la parabole est donc $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + 15$.



QUESTION 4 (*Le juge pile-ou-faciste)*

Un jury est formé de trois juges. Deux de ces juges sont également compétents : chacun a une probabilité de $p > 1/2$ de prendre la bonne décision (acquitter l'innocent ou condamner le coupable). Le troisième juge est un «pile-ou-faciste» : il acquitte ou condamne selon le lancement d'un sou. La décision finale du jury est prise à la majorité simple (2 à 1 ou 3 à 0). Quelle est la probabilité que le jury prenne la bonne décision ?

SOLUTION PROPOSÉE

Posons $q = 1 - p$. Soit D_1, D_2 et D_3 les décisions des 3 juges (le juge pile-ou-faciste est le juge 3). Chaque D_i est un succès (S) ou un échec (E). La décision globale du jury sera la bonne si $(D_1, D_2, D_3) \quad \{(S,S,S),(S,S,E),(S,E,S),(E,S,S)\}$.

Donc P (le jury prend la bonne décision) =

$$= pp\frac{1}{2} + pp\frac{1}{2} + pq\frac{1}{2} + qp\frac{1}{2}$$
$$= p^2 + pq = p(p+q) = p.$$

Le «pouvoir discriminant» du jury est donc équivalent à celui d'un seul juge compétent. Le «pile-ou faciste» annule un juge compétent.

QUESTION 5 (*Question de stratégie)*

Considérons le tableau ci-dessous contenant les entiers de 1 à 100 dont certains sont soulignés. André et Bernard jouent au jeu suivant. André commence le jeu en choisissant un nombre souligné a_1 tel que $1 \le a_1 \le 10$. Bernard poursuit le jeu en choisissant un nombre souligné b_1 tel que $a_1 < b_1 + 10$. Vient le tour d'André qui doit choisir un nombre souligné a_2 tel que $b_1 < a_2 \le b_1 + 10$. Ainsi, les deux joueurs jouent à tour de rôle et chaque joueur doit choisir un nombre souligné strictement plus grand que celui choisi à l'étape précédente par son adversaire et plus petit ou égal à ce dernier nombre augmenté de 10. Le perdant est le premier joueur qui ne peut pas jouer faute de nombre approprié à choisir. Quel nombre souligné a_1 André doit-il chosir pour être assuré de gagner ? Expliquer sa stratégie.

$\underline{\underline{1}}$	2	$\underline{\underline{3}}$	$\underline{\underline{4}}$	5	$\underline{\underline{6}}$	7	8	$\underline{\underline{9}}$	$\underline{\underline{10}}$	11	12	13	14	$\underline{\underline{15}}$	$\underline{\underline{16}}$	17	18	19	20
$\underline{\underline{21}}$	22	23	24	$\underline{\underline{25}}$	26	27	$\underline{\underline{28}}$	29	30	31	32	33	34	35	$\underline{\underline{36}}$	37	38	39	40
41	42	43	44	$\underline{\underline{45}}$	46	47	48	$\underline{\underline{49}}$	50	51	52	53	54	$\underline{\underline{55}}$	56	57	58	59	60
61	62	63	$\underline{\underline{64}}$	65	$\underline{\underline{66}}$	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	$\underline{\underline{78}}$	79	80
$\underline{\underline{81}}$	82	83	84	85	86	87	88	89	90	$\underline{\underline{91}}$	92	93	94	95	96	97	98	99	$\underline{\underline{100}}$

SOLUTION PROPOSÉE

Pour gagner André doit jouer 10 en premier. Voici sa stratégie.

	André	**Bernard**
1er choix	10	15 ou 16
2e choix	25	28
3e choix	36	45
4e choix	55	64
5e choix	66	perdu

Explication supplémentaire : soit $E = \{ n \quad \mathrm{N} \mid 1 \le n \le 100$ et n est souligné$\}$.

Notons $E = \{x_1, x_2, x_3, \ldots x_{21}\}$, $x_1 < x_2 < \ldots x_{21}$, alors $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ est la différence entre deux éléments consécutifs de E. On note que $\delta_{17} = 78 - 66 = 12 > 10$ et que $\delta_i \le 10$ pour tout

$1 \le i < 17$. Donc le dernier élément de E à être choisi par un joueur sera 66 et il sera choisi par le joueur gagnant.

Si nous considérons le jeu à rebours,

	Gagnant	**Perdant**
dernier choix	66	perdu
avant dernier choix	55	64
avant avant dernier choix	36	45 ou 49
	25*	28
	10**	15,16 ou 21

*Ici, il y a 2 coups possibles 21 ou 25. Nous devons cependant noter que le gagnant est le premier joueur à choisir 25. Sinon, si un joueur joue 21, alors l'autre joueur jouera 25 et gagnera la partie.

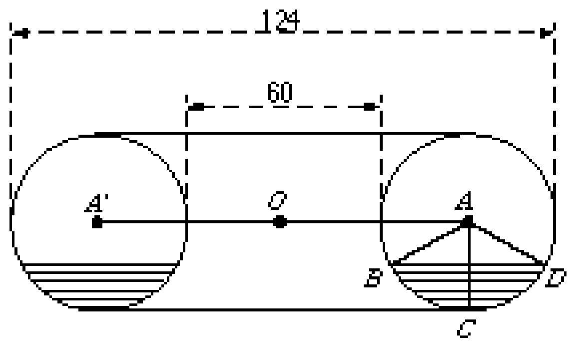
** Seul choix pour gagner.

Maintenant, on peut refaire le jeu dans le bon sens. La règle en résumé : le premier joueur à choisir 25 gagnera; et pour qu'André gagne, il lui suffit de commencer avec 10 et d'ensuite choisir 25. Pour tout autre premier coup (soit 1, 3, 4, 6 ou 9), Bernard choisirait 10 pour alors gagner.

QUESTION 6 (*La bouée de sauvetage)*

Une bouée de sauvetage, ayant la forme d'un «beigne» parfait, flotte paisiblement sur l'eau calme d'un lac par un beau soir d'été. La bouée pénètre l'eau à une profondeur de 8 cm et ses diamètres intérieur et extérieur mesurent respectivement 60 cm et 124 cm. Quel est le poids de la bouée ?

SOLUTION PROPOSÉE



La figure représente une section de la bouée selon un plan vertical passant par son centre 0. Les parties hachurées représentent la portion de la bouée sous l'eau. À cause du principe d'archimède, le poids (en grammes) de la bouée est égal au volume de révolution engendré par ce parties hachurées (en cm^3). Ce volume est égal à $2\pi.\overline{OA}$ multiplié par l'aire de la partie hachurée *BCDB* (on le voit facilement en additionnant les volumes de révolution engendrés par des rectangles minces horizontaux en faisant tendre le nombre de ces rectangles vers l'infini). Notons qu'on a (en cm) :

$$\overline{OA} = 60/2 + (124-60)/4 = 30 + 16 = 46$$

$$\overline{AB} = (124-60)/4 = 16 \text{ et } \angle BAD = 2 \arccos(8/16) = \pi/3.$$

Ainsi, on a (en cm^2) :

$$\text{aire } (BCDB) = \text{aire } (ABCDA) - \text{aire } (ABDA)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2 - 2\,\frac{8\sqrt{16^2-8^2}}{2} = \frac{256\pi}{3} - 64\sqrt{3}\ .$$

Le poids cherché de la bouée (en grammes) vaut donc

$$2\ \pi\ 46\left(\frac{256\pi}{3} - 64\sqrt{3}\right) = 5888\pi\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right).$$