CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

1997

NIVEAU COLLÉGIAL

SOLUTIONNAIRE

QUESTION 1 (Le nombre de zéros)

Combien y a-t-il de zéros dans la liste des entiers de 1 à 1997 ?

SOLUTION :

Classons les zéros selon leur position dans l'écriture décimale.

Position des unités : à partir de 10, il y a un zéro en position des unités à tous les dix nombres (10, 20, 30, …, 1990). TOTAL : 199 zéros.

Position des dizaines : à partir de 100, il y a 10 zéros en position des dizaines, à tous les 100 nombres (100, 101, …, 109, 200, …, 209, …1900, …1909). TOTAL : 190 zéros.

Position des centaines : les seuls zéros en position des centaines apparaissent dans 1000, 1001, …, 1099. TOTAL : 100 zéros.

Le nombre total de zéros dans la suite des entiers de 1 à 1997 est donc : **199 + 190 + 100 = 489**

QUESTION 2 (Le chiffre déplacé)

Pour tout nombre entier $n > 0$, définissons n^* comme étant l'entier obtenu en déplaçant à l'extrême gauche le chiffre des unités de n (dans l'écriture standard, base 10). Par exemple : $6177834^* = 4617783$ et $780^* = 078 = 78$. Trouver un entier $x > 0$ tel que

$$7x^* = 2x.$$

SOLUTION :

Si $x = 10n + u$ et n a k chiffres alors

$$x^* = 10^k u + n.$$

Il faut résoudre $7x^* = 2x$.

Ceci équivaut à

$$7\left(10^k u + n\right) = 2\left(10n + u\right).$$

C'est-à-dire

$$\left(7 \cdot 10^k - 2\right)u = \left(10 \cdot 2 - 7\right)n = 13n.$$

Or, $7 \cdot 10^k - 2 = 6999\ldots98$ avec $k-1$ fois "9". La plus petite valeur de k pour laquelle 13 divise $7 \cdot 10^k - 2$ est $k = 5$ (après calculs). Ainsi, $699998u = 13n$. C'est-à-dire que $n = {}^{699998u}\!/\!_{13} = 53846u$. Prenant $u = 1$, on trouve $n = 53846$ et $x = 53846 \cdot 10 + 1 = 538461$. On a bien $7x^* = 2x$ (valeur commune : 1076922).

Réponse : $\boldsymbol{x = 538461}$

QUESTION 3 (Le tétraèdre régulier)

Trouvez le volume du tétraèdre régulier dont les quatre sommets sont les points de l'espace dont les coordonnées sont

$$(1,1,1),\ (1,-1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1),\ (-1,\ -1,\ 1).$$

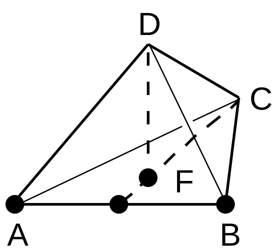
Note : Un tétraèdre régulier est une pyramide formée de 4 triangles équilatéraux.

SOLUTION :

Il y a plusieurs solutions possibles. La plus élémentaire utilise essentiellement le théorème de Pythagore : supposons que

$$A=(1,1,1),\ \ B=(1,-1,-1),\ \ C=(-1,1,-1),\ \ D=(-1,-1,1)$$

On a alors : Volume = $\frac{1}{3}\left(\text{aire } \Delta ABC\right)\times\left(\text{hauteur } \overline{DF}\right)$.



On a successivement,

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-1)^2+(1-(-1))^2+(1-(-1))^2}=2\sqrt{2}=\overline{BC}=\overline{DC}=\overline{AD},$$

$$\overline{EC}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{EB}^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6},$$

$$\overline{FC}=\frac{2}{3}\overline{EC}=\frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

D'où aire $\Delta ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{EC}=2\sqrt{3}$,

hauteur $\overline{DF}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{FC}^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Ainsi, Volume $=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=\frac{8}{3}$.

Réponse : Le volume est $\frac{8}{3}$

___

Notes : On peut aussi passer la géométrie analytique 3D (via la formule donnant la distance d'un point à un plan, pour trouver la hauteur), ou encore, par calcul vectoriel :

$$Vol=\left\|\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\ \overrightarrow{AD}\right\|.$$

QUESTION 4 (Le pion promeneur)

Un pion est promené au hasard sur les 9 cases d'un échiquier 3 × 3. Les cases sont numérotées selon l'illustration ci-dessous.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Au temps 0, le pion est sur la case 1 puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une des 2, 3 ou 4 cases voisines de celle où il était placé (avec des probabilités égales : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$ selon le cas). Les mouvements diagonaux sont interdits.

Évaluez la probabilité que la case 3 soit visitée avant la case 9.

SOLUTIONS :

Comme le pion se promène sans arrêt, il est certain qu'il visitera éventuellement chacune des cases; notons par P_i la probabilité que, partant de la case i, le pion visite la case 3 avant la case 9.

On cherche la valeur de P_1.

Par symétrie, on a $P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{2}$. De plus $P_7 = 1 - P_1$, $P_8 = 1 - P_2$, aussi, $P_3 = 1$ et $P_9 = 0$.

Si on part de la case 1, on sera, au temps suivant, sur l'une ou l'autre des cases 2 ou 4 (avec une chance sur deux pour chacune).

On en conclut que $P_1 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_4 \qquad P_1 = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}$ (1)

Si on part de la case 2, on sera, au temps suivant, sur l'une ou l'autre des cases 1, 3 ou 5 (avec une chance sur trois pour chacune).

On en conclut que $P_2 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_3 + \frac{1}{3}P_5 \qquad P_2 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

$$P_2 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2} \tag{2}$$

Les deux équations à deux inconnues (1) et (2) se résolvent aisément.

(1) $P_2 = 2P_1 - \frac{1}{2}$ puis, substituant cette valeur dans (2), on obtient : $2P_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2} \qquad \left(2 - \frac{1}{3}\right)P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad \frac{5}{3}P_1 = 1 \qquad P_1 = \frac{3}{5}$.

Réponse : la probabilité cherchée est $\frac{3}{5}$ (ou 60%).

Remarque : La détermination de P_1 permet de trouver rapidement tous les autres P_i. On obtient $P_2 = 2P_1 - \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$, $P_7 = 1 - P_1 = \frac{2}{5}$, $P_3 = 1$, $P_8 = 1 - P_2 = \frac{3}{10}$, $P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{2}$, $P_9 = 0$.

AUTRE SOLUTION PROPOSÉE PAR ROBERT BRASSARD (Cégep André-Laurendeau) ***:***

Soit P la probabilité (cherchée) qu'en partant de 1 on visite 3 avant de visiter 9. Alors $Q = 1 - P$ est la probabilité de plutôt passer en 9 avant de passer en 3. Notez que si l'on partait de la case 7 au départ, alors Q (resp. P) serait la probabilité de visiter 3 (resp. 9) avant 9 (resp. 3). Regardons les deux premiers pas. Il y a 6 possibilités toutes de probabilité 1/6. L'une, soit 1−2−3, mène à la case 3; une autre 1−4−7, mène à la case 7; deux soit 1−2−5 et 1−4−5 mènent à la case 5 et deux, 1−2−1 et 1−4− 1, retournent à 1.

On en déduit l'équation $P = \frac{1}{6}\ 1 + \frac{1}{6}(1 - P) + \frac{1}{3}\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3}P$ qui donne tout de suite $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}P$ et $P = \frac{3}{5}, Q = \frac{2}{5}$.

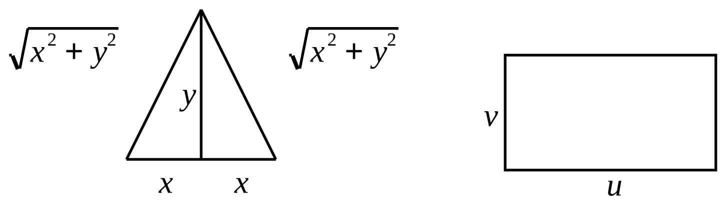
En effet : une chance sur six d'arriver (après deux pas) en 3 et d'assurément passer en 3 avant d'en 9, une chance sur six d'arriver en 7 et d'avoir une probabilité $1 - P$ de passer en 3 avant d'en 9, une chance sur trois d'arriver en 4 d'où par symétrie on passe une fois sur deux en 3 avant qu'en 9 et une chance sur trois de revenir en 1 d'où la probabilité est P.

QUESTION 5 (Le rectangle et le triangle)

Trouvez un rectangle et un triangle isocèle ayant même périmètre et même aire et dont tous les côtés sont de longueur entière.

SOLUTION :

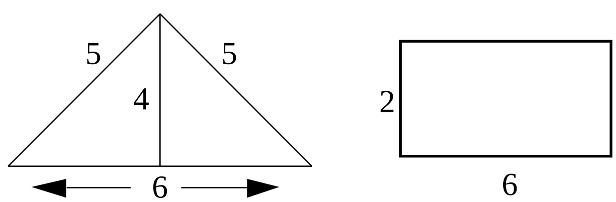
Il y a plusieurs solutions possibles. Par exemple, essayons avec un triangle isocèle de base $2x$ et de hauteur y et un rectangle de base u et de hauteur v.



Il faut résoudre

$$2x + 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2u + 2v$$
$$\frac{1}{2}(2x)\; y = uv$$

Tentons de résoudre ce système avec x, y, u, v entiers. Essayons $x = 3$, $y = 4$, alors $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$. On déduit alors la solution $u = 6$, $v = 2$ pour u et v.



QUESTION 6 (Le produit de dérivées)

Une fonction $f(x)$ satisfait la propriété remarquable $f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x) = 1$, pour tout $x \geq 0$. Sachant que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et $f(1) = 2$, démontrer que l'on a nécessairement $f'(1) = (1 + 3 \log 2)^{1/3}$.

Note : Ici, $\log c$ désigne le logarithme naturel de c (en base e).

SOLUTION :

Supposons l'existence d'une telle fonction $f(x)$. On a alors,

$$f(x)f'(x)f''(x) = 1 \qquad f'(x)f''(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad (f'(x))^2 f''(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

En intégrant de 0 à x les deux membres de la dernière équation, on obtient

$$\frac{1}{3}(f'(x))^3 - \frac{1}{3}(f'(0))^3 = \log f(x) - \log f(0)$$

Mais puisque $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, on en déduit que $(f'(x))^3 = 3 \log f(x) + 1$. En posant $x = 1$ dans cette dernière équation, la conclusion $f'(1) = (1 + 3 \log 2)^{1/3}$ s'ensuit (puisque $f(1) = 2$).

Note. Le professeur John Klassen, du Champlain Regional College (Sainte-Foy, Québec), nous a fait remarquer qu'il n'existe pas de fonction $f(x)$ satisfaisant les hypothèses énoncées dans le problème ! Son raisonnement est très intéressant et utilise le théorème de la moyenne (TM) : puisque $f(x)$ est dérivable deux fois pour tout $x \geq 0$, le TM s'applique à $f(x)$ et à $f'(x)$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq 1$. Il existe donc un c entre 0 et 1 tel que $(f(1) - f(0)) / (1 - 0) = f'(c)$. On a donc

$f'(c) = (2 - 1) / (1 - 0) = 1$. En appliquant le TM à $f'(x)$ il existe donc un ξ entre 0 et c tel que $(f'(c) - f'(0)) / (c - 0) = f''(\xi)$. On a donc $f''(\xi) = (1 - 1) / (c - 0) = 0$. Ce qui entraîne la contradiction $f(\xi) f'(\xi) f''(\xi) = 0$. Il existe d'autres façons d'établir la non existence de la fonction $f(x)$. (Le professeur Robert Brassard, du Cegep André-Laurendeau, nous en a mentionné une autre). Bien entendu, la non existence de la fonction $f(x)$ entraîne aussi, logiquement parlant, la conclusion $f'(1) = (1+3\log 2)^{1/3}$. Une attention spéciale a donc été portée à la correction de cette question.