Concours de l'AMQ 2014, ordre collégial

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

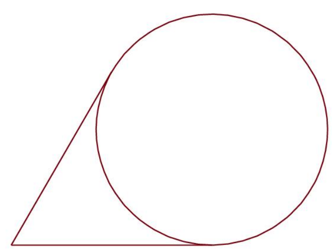
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

***Note** : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. Le silo pointu

On veut augmenter la capacité d'un silo à grains cylindrique de 20 mètres de hauteur en rajoutant deux murs verticaux de même longueur et aussi de hauteur 20 mètres. Dans la vue aérienne ci-dessous, si le point commun aux deux murs est positionné à l'origine, un des murs longe l'axe des x et l'autre mur est tangent au silo au point de coordonnées $(3, 3\sqrt{3})$, celles-ci étant en mètres. Quelle sera la capacité supplémentaire obtenue avec cette nouvelle construction ?

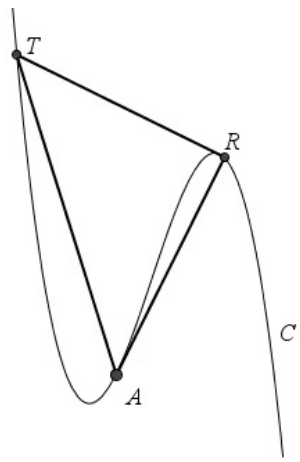


2. La question de Simon

Simon est en train d'effectuer un calcul sur sa calculatrice et celle-ci affiche le nombre 2.302775638 au moment où, par mégarde, il accroche le bouton pour élever au carré. Il remarque alors que le 2 du début se transforme en 5 mais que toutes les décimales demeurent exactement les mêmes ! ! Intrigué, il se demande si ce sont bel et bien toutes les décimales qui sont inchangées (et non seulement celles affichées) et s'il y a d'autres nombres entre 2 et 3 qui auraient cette caractéristique d'avoir le même développement décimal que leur carré. Aidez-le en trouvant tous les nombres répondant à ces critères.

3. Art abstrait

Soit le triangle ART rectangle en R et soit C une courbe décrite par un polynôme de degré 3. Les points A, R et T se situent sur la courbe C. Le point A est à l'origine et le point R se situe en (1, 2). De plus, AR est tangent à la courbe C en A et RT est tangent à la courbe C en R. Calculer l'aire du triangle ART.



4. Le choix des cieux

Les satellites utilisés pour le positionnement par GPS permettent de localiser précisément n'importe quel endroit sur Terre. On programme ceux-ci de façon à ce qu'ils choisissent complètement au hasard 5 endroits sur notre planète. Si on suppose que la Terre est une sphère, quelle est la probabilité que l'on puisse trouver une demi-sphère (frontière incluse) à la surface de laquelle au moins 4 des points choisis soient situés ?

5. Derrière chaque premier se cache une racine

Démontrer que pour tout nombre premier $p > 3$, il existe un entier n vérifiant l'égalité $p = \sqrt{24n+1}$.

6. 8 à tous les niveaux

Soit $M = n^8 - 8^4$ où n est un entier supérieur à 8. Démontrer que M peut toujours se décomposer en un produit de 4 entiers différents et supérieurs à 1.