

Concours de l'Association Mathématique du Québec Niveau collégial

Le jeudi 28 février 2013

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.

1. Le triangle ennemi

Jacqueline se casse la tête avec un triangle NMI , rectangle en I , dont elle doit calculer l'aire. Sa seule information est que les médianes MD et NE se croisent en O de telle sorte que la longueur de OD est de 3 et celle de OE est de 4. Aidez-la à trouver l'aire de ce triangle.

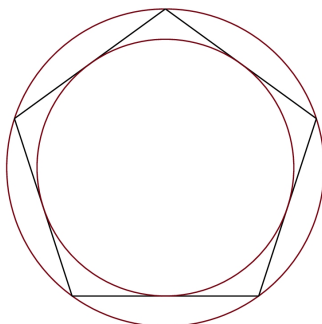
2. Le résultat mystère

Simon vous propose un jeu où vous choisissez au hasard deux nombres réels positifs. Il vous demande ensuite de calculer le carré de la somme des deux nombres et de diviser le tout par le produit des deux nombres. Il affirme alors que le résultat mystère que vous avez obtenu est plus grand ou égal à quatre. Montrer que Simon ne se trompera jamais avec cette affirmation.

3. Un π coincé

Montrer que pour tous les polygones réguliers dont l'arête mesure 2 unités, l'aire de l'anneau délimité par le cercle circonscrit au polygone et le cercle inscrit dans le polygone sera toujours égale à π .

Voici une illustration avec un pentagone régulier :



4. Deux dragons qui font boom !

Dans un jeu vidéo, deux dragons magiques volent dans un espace en trois dimensions. $P_1(t)$ et $P_2(t)$ donnent les positions (x, y, z) des dragons au moment t , où t est en secondes.

$$P_1(t) = \left(t8^t, 2 \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right), \lfloor t^3 - 4t^2 + 5t \rfloor \right) \text{ et } P_2(t) = \left(301 - t, \frac{17}{6} - t, t - \frac{1}{3} \right)$$

Est-ce que les deux dragons entreront en collision ? Si oui, donner le nombre total de collisions et le moment t correspondant à chacune des collisions.

Remarque : $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x .

5. Remonter à la racine du symbole

Vous devez déchiffrer un code vous donnant la valeur du nombre Ξ vérifiant l'égalité :

$$\Xi = \left| \sqrt{\Lambda} - \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \right|$$

Les informations que vous avez pu accumuler vous ont permis de savoir que :

$$\sqrt[3]{\Lambda} + \frac{1}{\sqrt[3]{\Lambda}} = 3$$

Quelle est donc la valeur du nombre Ξ ?

6. Les polynômes de l'année

Un polynôme de l'année est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2013, dont le coefficient du terme avec le plus haut degré est 1 et dont tous les zéros sont entiers. Combien y a-t-il de polynômes de l'année dont le produit des zéros (distincts ou non) est 2013 ?