

Concours de l'Association Mathématique du Québec Niveau collégial

Le jeudi 9 février 2012

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

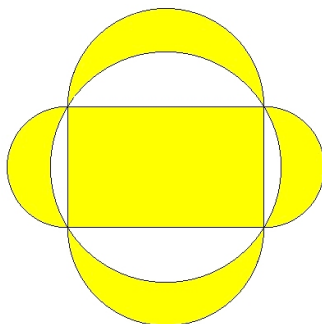
Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

1. Redorer son enseigne

Une compagnie veut se créer un nouveau logo très rutilant pour remplacer sa vieille enseigne extérieure. Celui-ci sera formé d'un rectangle d'or de 1 mètre par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ mètre inscrit dans un cercle. De plus, chaque côté du rectangle sera le diamètre d'un demi-cercle qui sera rajouté au logo tel qu'illustré dans la figure. La compagnie veut plaquer le rectangle et les lunules (la partie ombragée) de son logo d'une mince couche d'or 24 carats. Sachant que l'or en feuille minces de 24 carats se vend 0,05\$ du centimètre carré, combien en coûtera-t-il à la compagnie pour redorer son enseigne ?



2. La puce à remonter le temps

À minuit, une puce sur une horloge se situe dos à l'aiguille des heures et commence à courir à vitesse constante dans le sens inverse des aiguilles. À 8h, la puce diminue sa vitesse du quart, à 16h elle diminue encore sa vitesse, cette fois-ci du tiers. Exactement 24 heures après le début de sa course, la puce croise pour une 2012^e fois l'aiguille des heures. À quelle position sur l'horloge était la puce à 10h du matin ? Dire sur quel numéro de l'horloge se trouve la puce ou donner la fraction du chemin qu'il lui reste à parcourir entre deux numéros consécutifs.

3. Une question de concours... de circonstance

On vous demande de préparer une question pour un concours de mathématiques qui utilise la date du concours, soit le 9/2/12. Vous décidez d'employer une fraction continue où le jour et le mois seraient répétés de la façon suivante :

$$n = 9 + \frac{x}{2 + \frac{x}{9 + \frac{x}{2 + \frac{x}{9 + \dots}}}}$$

Quelle valeur de x devez-vous utiliser pour que le résultat n corresponde au nombre 12 de l'année ?

4. Les racines d'Olivier

Olivier s'amuse à trouver des polynômes $p(x)$, toujours à coefficients entiers, dont les racines (les zéros) sont des racines comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. Facile !

Question d'augmenter son défi, il décide ensuite d'en trouver un dont $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ serait une racine (c'est-à-dire que $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$). Il finit par en obtenir un qui, à sa grande surprise, est relativement simple. Trouver quel est ce polynôme à coefficients entiers.

5. Avoir plusieurs cordes à son arc... de cercle

Soit un cercle et un point P qui lui est extérieur. À partir de P on trace des droites qui, en traversant le cercle, définissent des cordes du cercle. Montrer que tous les points milieu de ces cordes sont situés sur un même cercle.

6. Les dés doublés

Jacques s'amuse avec de drôles de dés dont les faces opposées montrent un même chiffre : 1, 2 ou 3. Chacun de ces trois résultats est donc équiprobable. Il s'invente un jeu dont le but est d'obtenir le chiffre 3. Il commence par lancer un seul dé. Tant qu'il n'obtient aucun 3, il fait un nouveau lancer, mais lance cette fois un nombre de dés égal au plus grand chiffre obtenu lors du lancer précédent. En moyenne, combien de lancers seront nécessaires avant d'obtenir un 3 ?