Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau collégial

Le vendredi 11 février 2011

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

***Note** : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. La suite de nombres titanesques

Soit la suite de nombres définie récursivement pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$a_0 = 10$
$a_n = 10(a_{n-1})^{10}$ pour $n \geq 1$

Pour $n = 2011$, on obtient un nombre d'une taille époustouflante. Si on calcule le logarithme en base 10 de ce nombre, quelle est la somme de tous les chiffres qui le composent ?

2. Le message va droit au but

Émilie court le long d'une piste circulaire d'un rayon de 100 mètres. Olivier a un message urgent à lui donner et arrive à la piste au moment précis où elle est diamétralement opposée à lui, mais elle ne le remarque pas et continue sur sa trajectoire. Si Olivier court à la même vitesse qu'Émilie et se permet d'aller en ligne droite dans la direction qu'il veut sans suivre la piste, montrez que l'angle θ (mesuré, en radians, par rapport au diamètre qui les sépare initialement) qu'il doit choisir pour rejoindre le plus vite possible Émilie est tel que : $\theta = \cos(\theta)$.

3. Une formule très générale

Considérons la dérivée de u^v (où l'on supposera u toujours positif).

Si u est une fonction de x et v une constante, on obtient comme dérivée $v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$

Si v est une fonction de x et u une constante, on obtient comme dérivée $u^v \cdot \ln(u) \cdot \frac{dv}{dx}$

Montrer que si u et v sont toutes les deux des fonctions de x, la dérivée de u^v est la somme des deux dérivées précédentes.

(suite au verso)

4. **Le triangle de Pascale**

Pascale a un objet triangulaire (triangle scalène ABC) en plastique translucide d'une épaisseur uniforme de 5 mm et contenant un liquide coloré. Lorsqu'elle place la base AB de 36 cm à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur de 3 cm. Lorsqu'elle place la base BC de cet objet à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur égale au 1/4 de la hauteur issue du sommet A du triangle. En plaçant l'objet triangulaire sur la base CA, la hauteur du liquide est de 4 cm. Quelle est la longueur de la base CA ?

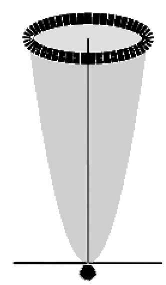
5. **L'exception qui contredit la règle**

Simon montre à Caroline la formule $f(n) = n^4 - 80n^2 + 100$ où $n \in \mathbb{N}$ en lui affirmant : «Je suis certain que la valeur absolue d'un nombre obtenu par cette formule ne peut jamais être un nombre premier». Caroline, qui prend un malin plaisir à le contredire, se dit qu'il doit bien exister au moins une valeur de n qui génère un nombre premier. Prouvez qu'elle a raison, mais qu'une telle valeur est unique.

6. **Une bonne colle pour le grand Merlin**

Lors d'un de ses nombreux tour de magie, le grand Merlin le magicien empile verticalement des boules rigides de différents rayons l'une par-dessus l'autre et ensuite il les cache complètement à l'aide de son fameux chapeau magique. Puis, lorsqu'il soulève son chapeau, il n'y a plus de boules. MAGIE!!!

Le truc : la partie creuse de son chapeau est un paraboloïde construit à partir de la révolution de la parabole $y = x^2$ autour de l'axe des y et dont la surface intérieure est collante. Les deux axes sont gradués en *talons* (unité de longueur dans le monde de la magie). Les boules sont des sphères toutes empilées pour que leurs centres soient sur l'axe central du paraboloïde tout en étant tangentes à la surface du paraboloïde, ce qui leur permet d'y coller.



Si la hauteur intérieure de son chapeau est de 16 *talons*, quel est le nombre maximal de boules que le grand Merlin peut faire disparaître ?