Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau collégial

Le vendredi 12 février 2010

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

***Note** : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. La pièce de monnaie Gaussienne

La République de Mathématique a décidé de faire une pièce de monnaie commémorative dont le côté face représente Gauss dans un cercle inscrit dans un rectangle, lui-même inscrit dans un plus grand cercle de rayon R. Exprimer le périmètre du rectangle en fonction de R, si l'aire en gris à l'extérieur du petit cercle représente une fraction $f = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} - 1$ de l'aire de ce petit cercle contenant Gauss.

2. Le polynôme récursif

On dit que $q(x)$ est le polynôme récursif de $p(x)$ si $q(x) = p(p(x))$. Trouver tous les polynômes possibles de la forme $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 13$ qui soient le polynôme récursif d'un polynôme $p(x)$ à coefficients entiers.

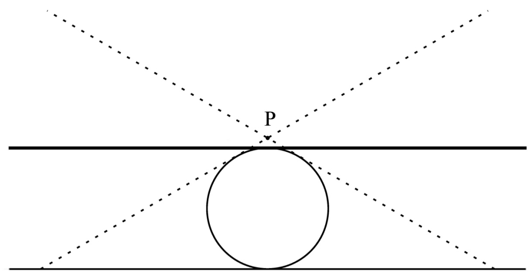
3. Les minutes sont comptées

Pour le mois de février 2010, un fournisseur d'accès de téléphonie cellulaire décide d'organiser le tirage d'un certain nombre de minutes de temps d'appel. L'octroi des minutes se fera selon le tordu principe suivant. À chaque jour du mois de février le récipiendaire obtiendra un nombre de minutes décroissant représentant une fraction de 2010. Le premier jour, un lot de 2010 minutes sera divisé en 2, puis ensuite en 3 et le nombre de minutes résultantes sera octroyé. Le second jour, les 2010 minutes seront divisées en 3, puis en 4 et le résultat sera octroyé. Le troisième jour, 2010 sera divisé en 4 puis en 5 et le résultat sera octroyé. Et ainsi de suite jusqu'à la fin du mois. Calculer le nombre total de minutes auquel correspond ce prix en supposant que les minutes sont comptabilisées sans perte de précision.

(suite au verso)

4. Le carré de la balançoire

Dans un parc, un carré de côté $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ m est réservé pour l'aménagement d'une balançoire à bascule rudimentaire. Celle-ci sera construite à l'aide d'une planche de 0,25 m de large, la plus longue possible, dont le centre sera posé sur un billot de $4-2\sqrt{3}$ m de diamètre. Après avoir identifié la région du carré à utiliser, les constructeurs ont installé la planche et se sont rendu compte que quand elle touche au sol, d'un côté ou de l'autre, elle passe toujours par un même point P dont la distance avec le sol est de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m. Dans ce contexte, calculer la longueur de la planche sachant que l'extrémité de celle-ci doit être entièrement dans le carré au moment de son contact avec le sol.



5. Le générateur de nombres

Un programme génère des nombres aléatoires entre 0 et 1. Le programme est conçu de telle sorte que pour tout x de 0 à 1, la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que x est trois fois plus grande que celle qu'il génère un nombre plus petit que $\frac{x}{4}$. De plus, la probabilité qu'il génère un nombre plus grand ou égal à x est identique à la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $(1-x)$. Calculer la probabilité que ce programme nous donne un nombre plus petit que $\frac{1}{21}$.

6. Ariane cherche le fil

Ariane, qui est d'une taille négligeable, se trouve dans le noir au centre d'un labyrinthe composé de 3 cercles troués qui se mettront bientôt à tourner en émettant un signal sonore. Les cercles ont des rayons de 50, 80 et 120 mètres et leurs portes de sortie débutent aux angles $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ et 0 radians, respectivement, et se terminent toutes $\frac{\pi}{6}$ radian plus loin dans le sens anti-horaire. Le cercle de rayon 80 tournera dans le sens horaire tandis que les deux autres tourneront dans le sens contraire. Les deux plus petits cercles mettront 50 secondes à faire un tour tandis que le plus grand en mettra 100. Sachant qu'Ariane marchera de façon rectiligne, sans changement de direction, à une vitesse d'un demi-mètre par seconde, indiquez-lui combien de temps après le signal elle doit partir et dans quelle direction elle doit marcher afin d'en sortir le plus rapidement possible.