Concours de l'Association Mathématique du Québec
Niveau collégial

Le vendredi 13 février 2009

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la démarche, la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

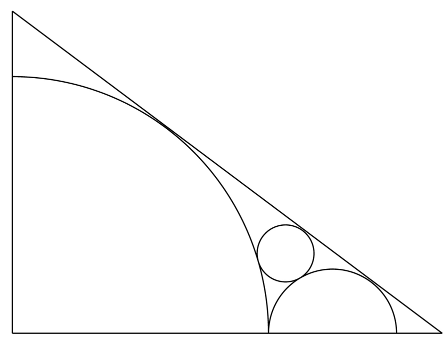
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

***Note :** L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

---

1. Un quart, un demi et un complet

À l'intérieur d'un triangle rectangle, on retrouve un quart de cercle de rayon 4, un demi-cercle de rayon 1 et un petit cercle. Les portions de cercles sont tangentes entre elles et tangentes à l'hypoténuse du triangle tel qu'illustré sur la figure ci-contre. Trouver le rayon du plus petit cercle.



2. Des racines et encore des racines

Soit $k = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}}}$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que k ne tend vers un nombre entier que si n est le produit de deux entiers consécutifs.

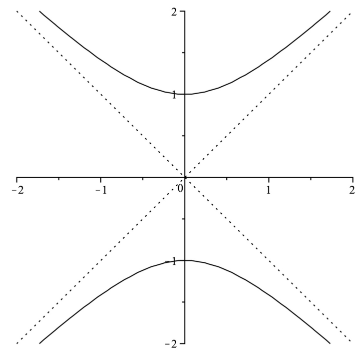
3. Les zéros impossibles

Soit $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ où p, q et r sont des entiers. Montrer que si $f(0)$ et $f(1)$ sont tous deux impairs, alors la fonction ne peut pas posséder trois zéros entiers.

(suite au verso)

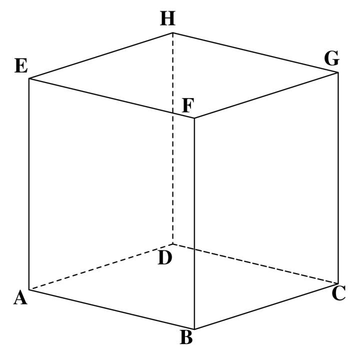
4. Une drôle d'aire

Considérons un point P quelconque de l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$ représentée sur la figure ci-contre avec ses asymptotes. Montrer que le triangle formé de la tangente à l'hyperbole au point P et des deux asymptotes de l'hyperbole aura toujours une surface dont l'aire est de 1, peu importe le point P.



5. Flacon rempli aux deux tiers ?

Josée possède un petit flacon cubique de 3 centimètres de côté contenant un liquide précieux qu'un marchand veut lui acheter. Pour fixer le prix, le marchand prétend que le flacon est rempli aux deux tiers car si on le place de telle sorte qu'une grande diagonale du cube (par exemple AG sur la figure) soit perpendiculaire au sol, il y a du liquide jusqu'aux deux tiers de cette diagonale. Pour savoir si Josée a intérêt à accepter cette interprétation, trouver la fraction du volume du flacon que le liquide représente en réalité.



6. Une souris pas commode

Jacob a une commode rectangulaire ayant 3 rangées de 3 tiroirs dans laquelle se cache régulièrement une souris. Elle choisit d'abord l'un des tiroirs au hasard puis, chaque fois que Jacob ouvre un tiroir pour vérifier si la souris s'y trouve et qu'elle n'y est pas, elle attend qu'il le referme et sort alors du tiroir où elle était afin de le narguer. Elle se cache ensuite dans l'un des tiroirs adjacents, horizontalement ou verticalement, qu'elle choisit toujours au hasard.

a) Trouver la meilleure stratégie à employer pour que Jacob attrape le plus rapidement possible la souris.

b) S'il se donne les meilleures chances possible, calculer le nombre moyen d'essais nécessaires pour que Jacob attrape la souris.