

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

NIVEAU COLLÉGIAL

Le vendredi, 9 février 2001, de 9h00 à 12h00

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.

QUESTION 1 - Lecture inversée

Pour tout nombre entier $x \neq 0$ écrit dans le système décimal, désignons par x^* le nombre entier obtenu en inversant l'ordre des chiffres de x . Par exemple, $36445^* = 54463$, $670^* = 076 = 76$, $0^* = 0$. Trouver un nombre entier x , formé de 4 chiffres décimaux, satisfaisant les deux conditions

$$x^* = 4x, \quad x > 0$$

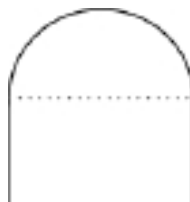
QUESTION 2 - Factorisation spéciale

Déterminer trois polynômes à coefficients entiers, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, de degrés respectifs 1, 3, 3, satisfaisant

$$x^7 - 2x^2 + 1 = a(x) b(x) c(x).$$

QUESTION 3 - Le terrain du boulanger

Un boulanger veut faire pousser du blé sur un champ de 2 km^2 ayant la forme d'une «tranche de pain» (= rectangle surmonté d'un demi cercle, voir figure). Quelles dimensions devra-t-il donner à son champ de façon à ce que la clôture le délimitant soit la plus courte possible ?



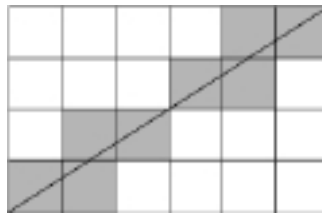
QUESTION 4 - Le train inspecté

Un train de chemin de fer se compose de n wagons dont chacun présente un défaut avec une probabilité p . Tous les wagons sont revus indépendamment les uns des autres par deux inspecteurs; étant donné un wagon, le premier d'entre eux découvre une défaillance (si elle existe) dans le wagon avec une probabilité p_1 , le deuxième, avec une probabilité p_2 . Si aucune défaillance n'a été trouvée dans les wagons, le train complet est mis sur la ligne. Trouver la probabilité de l'événement suivant :

le train est mis sur la ligne avec au moins un wagon défectueux.

QUESTION 5 - Les carrés traversés

Considérons un rectangle de dimensions 4 par 6 formé de 24 petits carrés égaux. Il est facile de voir qu'une diagonale d'un tel rectangle traverse exactement 8 petits carrés (ce sont les carrés gris de la figure).



Combien de petits carrés la diagonale traversera-t-elle si les dimensions du rectangle sont plutôt de 999 par 2001 ?

P.S. En pratique, ce genre de problème apparaît dans l'étude des droites tracées sur les écrans d'ordinateur, les pixels étant représentés par les petits carrés !

QUESTION 6 - Le triangle rectangle pythagoricien

Un triangle rectangle est appelé pythagoricien si ses trois côtés sont des nombres entiers. Démontrer que si un nombre premier $p > 2$ divise le périmètre d'un triangle rectangle pythagoricien, alors p divise au moins l'un des deux côtés de l'angle droit.
