Département de mathématiques, UQAM

1998

CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

NIVEAU COLLÉGIAL

SOLUTIONNAIRE

QUESTION 1 (*Les carrés parfaits inattendus)*

Démontrer que lorsque l'on ajoute 1 au produit de quatre nombres entiers consécutifs, on obtient *toujours* un carré parfait. Exemple : $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1=25=5^2$, $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+1=361=19^2$.

QUESTION 2 (*L'inégalité mystérieuse)*

Démontrer que pour tous nombres réels $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$ l'inégalité suivante est satisfaite

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\leq\frac{a+b+c}{3}.$$

QUESTION 3 (*Les deux tangentes à une parabole)*

Deux tangentes à une parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ se rencontrent au point $(6,1)$ du plan cartésien. Sachant que les points de contact de ces tangentes avec la parabole sont $(4,3)$ et $(8,7)$, déterminer l'équation exacte de cette parabole (c.-à-d., déterminer les valeurs numériques des constantes a, b et c).

QUESTION 4 (*Le juge pile-ou-faciste)*

Un jury est formé de trois juges. Deux de ces juges sont également compétents : chacun a une probabilité de $p>1/2$ de prendre la bonne décision (acquitter l'innocent ou condamner le coupable). Le troisième juge est un «pile-ou-faciste» : il acquitte ou condamne selon le lancement d'un sou. La décision finale du jury est prise à la majorité simple (2 à 1 ou 3 à 0). Quelle est la probabilité que le jury prenne la bonne décision ?

QUESTION 5 (*Question de stratégie)*

Considérons le tableau ci-dessous contenant les entiers de 1 à 100 dont certains sont soulignés. André et Bernard jouent au jeu suivant. André commence le jeu en choisissant un nombre souligné

a_1 tel que $1 \le a_1 \le 10$. Bernard poursuit le jeu en choisissant un nombre souligné b_1 tel que $a_1 < b_1 + 10$. Vient le tour d'André qui doit choisir un nombre souligné a_2 tel que $b_1 < a_2 \le b_1 + 10$. Ainsi, les deux joueurs jouent à tour de rôle et chaque joueur doit choisir un nombre souligné strictement plus grand que celui choisi à l'étape précédente par son adversaire et plus petit ou égal à ce dernier nombre augmenté de 10. Le perdant est le premier joueur qui ne peut pas jouer faute de nombre approprié à choisir. Quel nombre souligné a_1 André doit-il chosir pour être assuré de gagner ? Expliquer sa stratégie.

$\underline{1}$	2	$\underline{3}$	$\underline{4}$	5	$\underline{6}$	7	8	$\underline{9}$	$\underline{10}$	11	12	13	14	$\underline{15}$	$\underline{16}$	17	18	19	20
$\underline{21}$	22	23	24	$\underline{25}$	26	27	$\underline{28}$	29	30	31	32	33	34	35	$\underline{36}$	37	38	39	40
41	42	43	44	$\underline{45}$	46	47	48	$\underline{49}$	50	51	52	53	54	$\underline{55}$	56	57	58	59	60
61	62	63	$\underline{64}$	65	$\underline{66}$	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	$\underline{78}$	79	80
$\underline{81}$	82	83	84	85	86	87	88	89	90	$\underline{91}$	92	93	94	95	96	97	98	99	$\underline{100}$

Si nous considérons le jeu à rebours,

	Gagnant	**Perdant**
dernier choix	66	perdu
avant dernier choix	55	64
avant avant dernier choix	36	45 ou 49
	25*	28
	10**	15,16 ou 21

*Ici, il y a 2 coups possibles 21 ou 25. Nous devons cependant noter que le gagnant est le premier joueur à choisir 25. Sinon, si un joueur joue 21, alors l'autre joueur jouera 25 et gagnera la partie.

** Seul choix pour gagner.

Maintenant, on peut refaire le jeu dans le bon sens. La règle en résumé : le premier joueur à choisir 25 gagnera; et pour qu'André gagne, il lui suffit de commencer avec 10 et d'ensuite choisir 25. Pour tout autre premier coup (soit 1, 3, 4, 6 ou 9), Bernard choisirait 10 pour alors gagner.

QUESTION 6 (*La bouée de sauvetage)*

Une bouée de sauvetage, ayant la forme d'un «beigne» parfait, flotte paisiblement sur l'eau calme d'un lac par un beau soir d'été. La bouée pénètre l'eau à une profondeur de 8 cm et ses diamètres intérieur et extérieur mesurent respectivement 60 cm et 124 cm. Quel est le poids de la bouée ?