CONCOURS DE L'ASSOCIATION MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC

NIVEAU COLLÉGIAL

Le vendredi, 14 février 1997, de 9h00 à 12h00

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.

Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.

QUESTION 1 (Le nombre de zéros)

Combien y a-t-il de zéros dans la liste des entiers de 1 à 1997 ?

QUESTION 2 (Le chiffre déplacé)

Pour tout nombre entier $n > 0$, définissons n^* comme étant l'entier obtenu en déplaçant à l'extrême gauche le chiffre des unités de n (dans l'écriture standard, base 10). Par exemple : $6177834^* = 4617783$ et $780^* = 078 = 78$. Trouver un entier $x > 0$ tel que

$$7x^* = 2x.$$

QUESTION 3 (Le tétraèdre régulier)

Trouvez le volume du tétraèdre régulier dont les quatre sommets sont les points de l'espace dont les coordonnées sont

$$(1,1,1),\ (1,-1,-1),\ (-1,1,-1),\ (-1,-1,1).$$

Note : Un tétraèdre régulier est une pyramide formée de 4 triangles équilatéraux.

QUESTION 4 **(Le pion promeneur)**

Un pion est promené au hasard sur les 9 cases d'un échiquier 3×3. Les cases sont numérotées selon l'illustration ci-dessous.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Au temps 0, le pion est sur la case 1 puis, à chaque unité de temps, le pion est déplacé au hasard vers une des 2, 3 ou 4 cases voisines de celle où il était placé (avec des probabilités égales : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$ selon le cas). Les mouvements diagonaux sont interdits.

Évaluez la probabilité que la case 3 soit visitée avant la case 9.

QUESTION 5 **(Le rectangle et le triangle)**

Trouvez un rectangle et un triangle isocèle ayant même périmètre et même aire et dont tous les côtés sont de longueur entière.

QUESTION 6 **(Le produit de dérivées)**

Une fonction f(x) satisfait la propriété remarquable $f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x) = 1$, pour tout $x \geq 0$. Sachant que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et $f(1) = 2$, démontrer que l'on a nécessairement $f'(1) = (1 + 3 \log 2)^{1/3}$.

Note : Ici, log c désigne le logarithme naturel de c (en base e).
