Association
mathématique
du Québec

Lu pour vous

Graph Theory in America: The First Hundred Years

Frédéric Morneau-Guérin
Département Éducation, Université TÉLUQ
Frederic.Morneau-Guerin@teluq.ca

Il y a quelque chose d'un peu paradoxal dans notre rapport à l'histoire des mathématiques. Nous sommes entourés de noms propres. Nous parlons, par exemple, du théorème de Cauchy, du théorème de Pythagore, du dernier théorème de Fermat, du déterminant de Vandermonde, des graphes hamiltoniens ou eulériens. À première vue, peu de disciplines semblent conserver aussi soigneusement la mémoire de ceux et celles qui les ont façonnées. Et pourtant, comme le souligne Gary Chartrand dans la préface de *Graph Theory in America : The First Hundred Years*, nous n'avons guère l'habitude de penser les mathématiques historiquement. Le nom survit, mais le contexte disparaît.

Cela s'explique assez bien. Pour le mathématicien, ce qui importe finalement dans un résultat est sa portée, sa précision, sa véracité, ses conséquences et ses relations avec les autres résultats. Un théorème vieux de deux siècles est volontiers reformulé dans la notation d'aujourd'hui, avec le vocabulaire d'aujourd'hui et dans un cadre axiomatique qui aurait parfois été parfaitement étranger à son auteur. On lui donne une nouvelle démonstration—plus courte, plus conceptuelle, plus générale—et personne ne songe pour autant à changer son nom. Pythagore n'aurait pas reconnu toutes les dizaines de formulations contemporaines du théorème qui porte son nom (en géométrie analytique, dans les espaces euclidiens de dimension quelconque, dans les espaces préhilbertiens ou de Hilbert, ou encore sous les formes apparentées que prend l'identité de Pythagore en analyse de Fourier) ; cela ne nous trouble guère.

La chose est encore accentuée par l'ancienneté d'une bonne partie des mathématiques. Remonter à l'origine exacte d'une idée secondaire en analyse, en géométrie ou en théorie des nombres peut exiger de traverser plusieurs siècles de changements de notation, de terminologie et même de conception des objets étudiés. À force d'être réorganisées, simplifiées et systématisées, les mathématiques finissent par donner l'impression d'avoir toujours existé.

Et puis les mathématiques se veulent universelles. Un théorème n'est pas canadien, français ou allemand par nature. Sa validité ne dépend pas du lieu où il a été développé. Cela n'empêche évidemment pas que les intérêts, les traditions et les styles de recherche puissent présenter une forte coloration locale ou nationale ; pensons, par exemple, à l'école polonaise de mathématiques et à l'importance qu'y ont prise la topologie et la théorie descriptive des ensembles, dont les

 © Association mathématique du Québec

« espaces polonais » gardent jusque dans leur nom la trace historique. Les idées ont d'ailleurs toujours traversé les frontières, les langues et les cultures, parfois avec retard, certes, mais suffisamment pour que l'idée même d'écrire l'histoire d'une théorie mathématique en fonction d'un territoire ne nous vienne pas spontanément à l'esprit.

C'est précisément ce qui rend le titre *Graph Theory in America* intrigant.

Or, s'il est une branche des mathématiques dont on peut assez naturellement raconter l'histoire en l'ancrant dans un lieu, des institutions et un réseau de chercheurs, c'est bien la théorie des graphes. Elle est jeune, du moins à l'échelle des mathématiques. On peut bien sûr faire commencer l'histoire avec Euler et les ponts de Königsberg au XVIII^{e} siècle, et rechercher encore plus loin quelques préfigurations, mais l'émergence véritable d'une théorie structurée des graphes se produit essentiellement aux XIX^{e} et XX^{e} siècles. Les acteurs sont donc assez proches de nous pour que leurs lettres, leurs institutions, leurs revues, leurs collaborations et parfois leurs querelles soient encore relativement accessibles.

Elle possède en outre une physionomie singulière. Pour le dire sans suggérer le moins du monde qu'elle serait simple ou superficielle, la théorie des graphes a un faible coût d'entrée conceptuel. Il n'est pas nécessaire d'avoir traversé plusieurs couches d'abstraction avant de comprendre ce qu'est un sommet, une arête, un chemin, un cycle ou une coloration. Beaucoup de problèmes et même certains résultats peuvent être expliqués à un étudiant débutant, parfois même à un enfant : le lemme des poignées de main, le lemme des mariages, le problème des ponts de Königsberg ou encore l'affirmation selon laquelle, parmi six personnes, on en trouve toujours trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui sont mutuellement étrangères. On peut en comprendre l'énoncé bien avant d'être en mesure d'apprécier les difficultés mathématiques qu'il recèle. La simplicité d'un énoncé peut être trompeuse : il tient parfois sur une serviette de table, alors que sa démonstration peut résister pendant un siècle.

Le problème des quatre couleurs en est évidemment l'exemple par excellence. Il en existe bien d'autres : la théorie des couplages, les problèmes de Ramsey sur les graphes, le nombre chromatique du plan. Quantité de questions extrémales ou de problèmes d'existence ont cette propriété remarquable d'être immédiatement intelligibles tout en étant mathématiquement redoutables.

Et si la théorie des graphes présente ce faible seuil d'entrée, elle déploie ses ramifications dans un nombre impressionnant de directions. Elle touche à la combinatoire, naturellement, mais aussi à la topologie, à l'algèbre linéaire et à la théorie spectrale, aux probabilités, à l'optimisation, à la recherche opérationnelle, à l'informatique théorique, à la théorie de l'information, aux réseaux électriques, à la théorie des matroïdes, à certains aspects de la théorie des représentations et à bien d'autres domaines encore. Le graphe est tantôt l'objet mathématique lui-même, tantôt un modèle, tantôt une représentation, tantôt un langage permettant de voir une structure qui restait invisible autrement.

Cette extraordinaire faculté de ramification est justement ce que les auteurs—Robin Wilson, John J. Watkins et David J. Parks—font apparaître tout au long du livre.

Les « cent premières années » du titre sont les années 1876 à 1976. Le choix des bornes est fort bien trouvé. En 1876, James Joseph Sylvester arrive à la nouvelle Université Johns Hopkins, à Baltimore. En 1976, Kenneth Appel et Wolfgang Haken annoncent leur démonstration du théorème des quatre couleurs, dont une partie substantielle repose sur des calculs informatiques. Entre ces deux dates, les mathématiques américaines ont changé de monde ; et la théorie des graphes avec elles.

Mais avant même d'arriver à Sylvester, Wilson, Watkins et Parks remontent aux débuts de l'enseignement supérieur dans les colonies britanniques. Les mathématiques y occupent d'abord une place bien modeste. Les collèges ont essentiellement une mission d'enseignement (souvent même d'enseignement mathématique relativement élémentaire) ; l'idée de l'université comme lieu de production systématique de connaissances scientifiques reste encore à construire.

L'ouvrage évoque au passage les effets de la guerre de 1812 sur les relations scientifiques américaines. Le refroidissement avec la Grande-Bretagne favorise un rapprochement avec la France, dont la tradition mathématique et scientifique accorde alors aux mathématiques fondamentales une place beaucoup plus importante que celle qu'elles occupent dans une culture britannique davantage tournée vers certaines applications pratiques. Ce sont ces petites bifurcations historiques, que l'on ne rencontre pratiquement jamais dans un cours de mathématiques, qui donnent au livre une grande partie de son intérêt.

L'idée, évoquée plus haut, de l'université comme lieu de production du savoir commence véritablement à prendre corps aux États-Unis avec la fondation de l'Université Johns Hopkins. Son premier président, Daniel Coit Gilman, souhaite bâtir aux États-Unis une université qui ne se contente pas de transmettre le savoir, mais qui en produise. Pour lancer les mathématiques, il recrute James Joseph Sylvester.

Quel personnage !

Sylvester est alors un mathématicien anglais éminent, aujourd'hui bien connu notamment des algébristes. Sa carrière n'a pourtant rien eu d'un long fleuve tranquille. Juif dans une Angleterre où les restrictions confessionnelles lui avaient fermé plusieurs portes universitaires, il avait dû emprunter des voies professionnelles inattendues, allant jusqu'à pratiquer le droit pendant une période de sa vie. Lorsqu'on vient chercher cet homme de plus de soixante ans, alors retraité, pour lui proposer de participer à l'édification d'un nouveau centre de recherche mathématique en Amérique, la perspective est manifestement assez séduisante pour lui faire traverser l'Atlantique.

Son influence sera considérable. Il forme des étudiants, crée autour de lui un milieu de recherche et contribue à la fondation de l'*American Journal of Mathematics*, qui demeure le plus ancien périodique américain de recherche mathématique encore publié.

C'est ici que le livre commence véritablement à montrer ce qu'est l'histoire concrète d'une discipline. Une théorie ne se développe pas seulement parce que quelqu'un démontre un bon théorème. Il faut des étudiants, des professeurs, des revues, des postes, des correspondants, des lieux où présenter les résultats, des réseaux permettant aux idées de circuler. Il faut aussi, parfois, quelques fortes personnalités décidées à faire exister ces structures alors qu'elles n'existent pas encore.

Les auteurs s'intéressent beaucoup à ces personnalités, et c'est un des traits distinctifs de leur ouvrage. Ils n'hésitent pas à s'éloigner pendant quelques pages d'un problème mathématique pour raconter une carrière, une amitié, une brouille ou une correspondance lorsque celle-ci aide à comprendre comment les idées ont circulé.

Ainsi en est-il de la longue relation entre Sylvester et Arthur Cayley. Les deux hommes s'étaient connus pendant une période creuse de la carrière de Sylvester, alors que celui-ci s'était temporairement tourné vers le droit. Leur correspondance devient ensuite un remarquable vecteur d'échanges entre l'Angleterre et les États-Unis.

Ainsi, encore, de la dispute entre Sylvester et William Story, peu avant le retour définitif de Sylvester en Angleterre. Les tensions autour de l'*American Journal of Mathematics* contribuent à isoler Story, mais participent aussi indirectement à déplacer des personnes et à disséminer des idées. L'histoire des mathématiques a parfois ses effets de ricochet.

Les auteurs abordent également des éléments humains moins reluisants, lorsque ceux-ci contribuent au portrait historique. L'antisémitisme de George D. Birkhoff est notamment évoqué, de même que les conséquences que certains comportements ont pu avoir sur le milieu universitaire américain. On retrouve ici une distinction importante : si les résultats mathématiques aspirent à l'universalité, les milieux où ils prennent forme, circulent et se développent restent profondément tributaires de leur époque, des institutions et des individus qui les portent.

Sylvester est aussi à l'origine d'un épisode particulièrement révélateur de la nature de la théorie des graphes. Il s'intéresse aux diagrammes utilisés par les chimistes pour représenter les molécules et croit y reconnaître des liens avec certaines structures algébriques qu'il étudie. La parenté s'avérera en partie plus notationnelle que conceptuelle, mais l'intuition est intéressante : un même dessin, un même réseau de points et de relations, peut servir de langage à des objets d'origines complètement différentes. Cette capacité des graphes à devenir un pont entre des disciplines sera d'ailleurs appelée à se répéter maintes et maintes fois.

Mais le véritable personnage récurrent du livre n'est pas un mathématicien. C'est un problème : celui des quatre couleurs. Le choix n'a rien d'étonnant puisque Robin Wilson lui-même est l'auteur de l'excellent *Four Colours Suffice*, consacré à l'histoire de ce problème. Dans le présent ouvrage, celui-ci revient continuellement, disparaît quelques pages, puis ressurgit sous une autre forme, avec une autre génération de chercheurs. Il fournit ainsi au livre une sorte de colonne vertébrale.

L'un des épisodes les plus connus est celui d'Alfred Kempe. En 1879, celui-ci publie dans l'*American Journal of Mathematics* ce qu'il croit être une démonstration du théorème des quatre couleurs. Pendant plus d'une décennie, la question semble réglée. Puis Percy Heawood découvre une faille.

Mais une mauvaise démonstration peut faire de très bonnes mathématiques. Certaines des idées introduites par Kempe survivent parfaitement à l'effondrement de sa preuve. Les chaînes qui portent aujourd'hui son nom continuent d'occuper une place importante dans l'étude des colorations. L'épisode illustre admirablement la différence entre un raisonnement faux et un raisonnement stérile : les deux notions sont loin d'être synonymes.

Le choix de Kempe de publier sa démonstration en Amérique eut lui aussi des conséquences. Le problème attire l'attention de chercheurs américains, et l'on voit successivement intervenir Paul Wernicke, Oswald Veblen, George Birkhoff, Philip Franklin et plusieurs autres.

Il est assez amusant de constater, avec le recul, combien la théorie des graphes a longtemps souffert d'un problème de respectabilité. Pour certains mathématiciens européens, ces histoires de cartes à colorier et de réseaux d'arêtes avaient quelque chose de récréatif, sinon de suspect. On trouvait les problèmes trop élémentaires dans leur formulation, trop artificiels ou insuffisamment rattachés aux grandes structures alors jugées nobles. On ira même jusqu'à qualifier les théorie des graphes de « *slum of topology* ».

Il est difficile de ne pas sourire en lisant cela aujourd'hui. Ce prétendu taudis allait devenir l'un des quartiers les plus animés des mathématiques modernes.

Et le livre montre précisément comment cela s'est produit. Le problème des quatre couleurs demeure constamment présent, mais autour de lui apparaissent les réseaux électriques de Kirchhoff, les arbres, les flots, l'optimisation combinatoire, les travaux de Ford et Fulkerson, les idées de Claude Shannon en théorie de l'information, les problèmes de transport et de plus courts chemins. Peu à peu, les graphes cessent d'être seulement associés à quelques problèmes divertissants et deviennent le langage naturel de phénomènes scientifiques, industriels et technologiques de première importance.

Le décor institutionnel change lui aussi. Les universités ne sont plus les seuls lieux où se développent des mathématiques sophistiquées. Bell Labs, RAND, General Electric et d'autres centres de recherche apparaissent dans le récit. Les besoins en télécommunications, en planification, en logistique, en optimisation et, plus tard, en informatique font des mathématiques discrètes un outil de plus en plus central.

Les deux guerres mondiales jouent évidemment leur rôle. L'interaction entre les mathématiciens universitaires et la société s'intensifie dans le cadre des efforts de guerre, puis ne revient jamais complètement à son état antérieur. Avec l'apparition de l'ordinateur, un nouveau changement de régime se produit. Les graphes sont particulièrement bien adaptés à ce nouvel univers fait d'algorithmes, de réseaux et d'objets discrets.

Il n'est donc pas anodin que le livre s'arrête en 1976. La démonstration d'Appel et Haken du théorème des quatre couleurs boucle magnifiquement le récit. Le problème qui avait accompagné l'essor de la théorie des graphes pendant près d'un siècle trouve enfin sa solution au moment même où la notion de preuve mathématique commence à être transformée par l'intervention de l'ordinateur. Une histoire s'achève et une autre commence.ç

Le mot *America* du titre appelle par ailleurs une petite précision géographique. Il faut officiellement l'entendre comme *North America*, et le Canada n'est pas entièrement absent. William Tutte, Anglais d'origine installé au Canada, y occupe naturellement une place importante, et l'Université de Waterloo apparaît dans la partie plus récente du récit. Mais l'Amérique de ce livre est, dans une très large mesure, celle des États-Unis. Ce n'est pas tant une thèse qu'un reflet du centre de gravité choisi par l'ouvrage : Baltimore, Harvard, Princeton, Chicago et les réseaux qui se constituent autour de ces institutions occupent l'essentiel de la scène.

Cette scène n'est toutefois jamais isolée de l'Europe. Deux intermèdes substantiels interrompent volontairement le récit américain pour aller voir ce qui se passe de l'autre côté de l'Atlantique. Guthrie, Tait, Heawood, Petersen, Heffter, Tietze et Minkowski apparaissent dans le premier ; König, Errera, Sainte-Laguë, Menger et Kuratowski, entre autres, dans le second. Cette structure est particulièrement efficace. Elle évite de donner l'illusion d'une théorie des graphes américaine ayant grandi en vase clos : les idées voyagent continuellement, sont importées, transformées, réexportées.

Au fil de ces quelque cent années, le lecteur fait ainsi connaissance avec plusieurs dizaines de mathématiciens aujourd'hui moins connus et retrouve sous un jour nouveau une vingtaine de noms que l'on rencontre régulièrement dans les cours et les livres. Benjamin Peirce et son fils Charles Sanders Peirce, Sylvester, Veblen, Birkhoff, Whitney, Shannon, Tutte et plusieurs autres cessent momentanément d'être des noms attachés à un théorème ou à une définition pour redevenir des personnes placées dans un réseau de collègues, d'étudiants et d'institutions.

On prend surtout conscience du caractère encore très petit de ce réseau à la fin du XIX^{e} siècle. Quelques personnes pouvaient avoir une influence immense simplement parce que les chercheurs étaient peu nombreux et que les institutions étaient encore en train de se constituer. La force de caractère, la vision, les amitiés et les inimitiés comptaient alors énormément.

Les femmes sont naturellement beaucoup moins nombreuses dans cette histoire, à l'image du monde universitaire de la période considérée. La présence de Sister Mary Petronia Van Straten, religieuse et mathématicienne qui travailla notamment sur le problème des quatre couleurs, n'en est que plus remarquable. Elle rappelle, à sa manière, que l'histoire d'une théorie se confond aussi avec celle des trajectoires individuelles rendues possibles, infléchies ou contrariées par les institutions de leur époque ; comme on l'avait déjà vu, sous une autre forme, avec Sylvester et les obstacles rencontrés en Angleterre en raison de sa judaïté.

La présentation du livre mérite enfin qu'on s'y arrête. Plusieurs extraits d'articles ayant joué un rôle important sont reproduits dans des encadrés gris, accompagnés d'explications et replacés dans leur contexte. C'est une excellente idée. Le lecteur ne se contente pas d'apprendre que tel article fut important : il peut en voir un fragment et mesurer la distance entre le langage de l'époque et celui que nous utiliserions aujourd'hui.

L'ouvrage réussit également à fonctionner à deux niveaux. Il peut être lu par quelqu'un dont l'intérêt est avant tout historique et qui ne connaît que peu la théorie des graphes. Les explications sont suffisamment accessibles pour que le fil général ne soit jamais perdu. Mais le mathématicien professionnel n'est pas pour autant condamné à rester à la surface : les auteurs fournissent assez de détails sur les problèmes, les méthodes et les filiations intellectuelles pour que le contenu mathématique conserve toute sa saveur.

L'une des grandes réussites de *Graph Theory in America* tient précisément à cela : le livre ne raconte pas seulement quels théorèmes ont été démontrés ; il montre comment une communauté mathématique se constitue.

En l'espace d'un siècle, on voit ainsi se constituer tout un écosystème : les universités se donnent une véritable mission de recherche, les revues et les réseaux de chercheurs favorisent la

circulation des idées, les applications industrielles et militaires ouvrent de nouvelles directions, puis l'informatique transforme à son tour les méthodes et les problèmes. Au milieu de ces mutations, certaines questions traversent les générations, se transforment, engendrent de nouvelles techniques et finissent parfois par trouver leur solution dans un contexte mathématique devenu méconnaissable par rapport à celui qui les avait vues naître. Le problème des quatre couleurs en fournit ici l'exemple emblématique.

Nous pouvons parfaitement enseigner le théorème des quatre couleurs sans savoir tout cela.

Mais après avoir lu Wilson, Watkins et Parks, il est difficile de prétendre que savoir tout cela n'ajoute rien. La vérité mathématique est intemporelle, du moins dans l'idéal que nous nous en faisons. La vie des mathématiques ne l'est pas. Elle dépend de lieux, de revues, de voyages, de lettres, de rencontres, de préjugés, de querelles, de guerres, de technologies et, surtout, de personnes. Il fallait peut-être trois spécialistes des graphes pour nous rappeler que l'histoire des mathématiques est elle-même une histoire de réseaux.