Association
mathématique
du Québec

Chronique

Problèmes et jeux mathématiques

Daniel Audet
Collège de Bois-de-Boulogne

Nous vous encourageons à envoyer vos solutions à bulletin@amq.math.ca. Les noms des personnes ayant résolu les problèmes seront publiés avec les solutions dans la prochaine édition.

Les problèmes

Problème 1 — Carrés en somme

Déterminer tous les triplets d'entiers (a,b,c) qui satisfont simultanément

$$a^2 = b + c + 5, \qquad b^2 = a + c - 1, \qquad c^2 = a + b - 1.$$

Problème 2 — Un triangle équilatéral dans une grille carrée

Considérons une grille formée de carrés identiques. Est-il possible de choisir trois points d'intersection de la grille qui soient les sommets d'un triangle équilatéral ? Si oui, donnez un exemple et si non démontrez cette impossibilité.

Problème 3 — Paires sans collision On considère des points également espacés sur la circonférence d'un cercle et on les regroupe au hasard en paires. Les deux points de chaque paire sont reliés par une corde.

1. Avec 4 points, quelle est la probabilité qu'aucune paire de cordes ne se croise ?
2. Même question avec 6 points.
3. Plus généralement, avec $2n$ points, quelle est la probabilité qu'aucune paire de cordes ne se croise ?

© Association mathématique du Québec

Solutions aux problèmes de la chronique précédente

Problème 1 — La tour d'intégrales

Résoudre

$$\int_1^{\int_1^{\int_1^{\cdots}(5-2x)\,dx}(5-2x)\,dx}(5-2x)\,dx$$

Solution.

Notons I la valeur de la tour d'intégrales, si cette valeur existe. Puisque la tour qui apparaît comme borne supérieure de la première intégrale est la tour elle-même, on doit avoir

$$I = \int_1^I (5-2x)\,dx.$$

Ainsi,

$$I = \left[5x - x^2\right]_1^I = 5I - I^2 - 4.$$

Par conséquent,

$$I^2 - 4I + 4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(I-2)^2 = 0.$$

La seule valeur possible est donc

$$\boxed{I = 2}.$$

On vérifie d'ailleurs immédiatement que

$$\int_1^2 (5-2x)\,dx = 2,$$

de sorte que 2 est bien une valeur de la tour.

Problème 2 — L'impossible carré dans une grille triangulaire

Considérer une grille triangulaire formée de triangles équilatéraux identiques. Autrement dit, une grille isométrique. Montrer qu'on ne peut pas former de carré dont les sommets sont aux intersections de cette grille.

Solution.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires formant un angle de 60 °. Les sommets de la grille triangulaire sont précisément les points dont les coordonnées dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont entières.

Considérons la rotation R d'angle 90 °. Dans une base orthonormée, on peut prendre

$$\vec{u} = (1,0) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

On vérifie alors que

$$R(\vec{u}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{u} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\vec{v}$$

et

$$R(\vec{v}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\vec{u} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{v}.$$

Ainsi, dans la base $(\vec{u},\vec{v})$, la matrice de la rotation est

$$[R] = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons maintenant qu'un carré ait ses quatre sommets sur la grille. Le vecteur correspondant à l'un de ses côtés s'écrit alors

$$\vec{w} = p\,\vec{u} + q\,\vec{v}, \qquad p,q \in \mathbb{Z},$$

avec $(p,q) \neq (0,0)$.

Le côté suivant du carré est obtenu en faisant subir à $\vec{w}$ une rotation de 90°. Ses coordonnées dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont donc

$$[R]\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -p-2q \\ 2p+q \end{pmatrix}.$$

Puisque les deux extrémités de ce second côté sont également des sommets de la grille, ces deux coordonnées doivent être entières.

Or p et q sont entiers et $\sqrt{3}$ est irrationnel. Pour que

$$\frac{-p-2q}{\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad \frac{2p+q}{\sqrt{3}}$$

soient tous deux entiers, il faut donc que

$$-p-2q = 0 \qquad \text{et} \qquad 2p+q = 0.$$

Ce système n'a que la solution

$$p = q = 0,$$

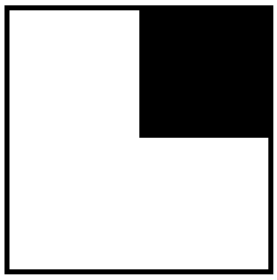
ce qui contredit le fait que $\vec{w}$ est le vecteur d'un côté du carré.

Il est donc impossible de former un carré dont les quatre sommets sont des sommets d'une grille triangulaire.

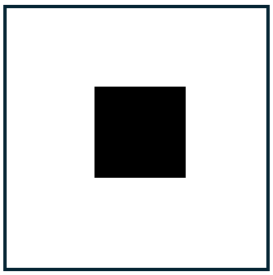
Problème 3 — Le tournant du coin

Deux points sont choisis au hasard uniformément et indépendamment à l'intérieur de la partie blanche d'une forme. Quelle est la probabilité qu'ils se voient ? C'est-à-dire, quelle est la probabilité qu'on puisse tracer un segment de droite, entièrement contenu dans la partie blanche, reliant ces deux points ?

1. Première forme



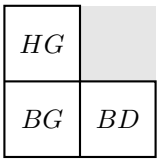
2. Deuxième forme



Solution.

1. Première forme

Divisons la région blanche en trois carrés de même aire : le carré en haut à gauche, que nous noterons HG, le carré en bas à gauche, BG, et le carré en bas à droite, BD.



Les deux points peuvent ne pas se voir seulement lorsque l'un appartient à HG et l'autre à BD. Comme les trois carrés ont la même aire et que les deux points sont choisis uniformément et indépendamment, la probabilité que cela se produise est

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Supposons donc qu'un point soit choisi dans HG et l'autre dans BD. Le segment qui les relie coupe nécessairement la droite verticale passant par le coin rentrant de la région. Les deux points se voient si cette intersection se trouve sous le coin rentrant ; si elle se trouve au-dessus, le segment traverse le carré manquant.

Or, la symétrie centrale de centre le coin rentrant échange HG et BD. Elle transforme un couple de points dont le segment coupe cette droite au-dessus du coin en un couple dont le segment la coupe au-dessous du coin, et réciproquement. Ces deux possibilités ont donc la même probabilité. Le cas où le segment passe exactement par le coin étant de probabilité nulle, on en déduit que, conditionnellement au fait que les deux points appartiennent à HG et BD, la probabilité qu'ils ne se voient pas est $\frac{1}{2}$.

Ainsi,

$$P(\text{les deux points ne se voient pas}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

Finalement,

$$P(\text{les deux points se voient}) = 1 - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}.$$

2. Deuxième forme

Divisons maintenant la région blanche en huit carrés de même aire. Nous noterons les quatre carrés situés dans les coins NO, NE, SO et SE, selon leur position : nord-ouest, nord-est, sud-ouest et sud-est. Les quatre autres carrés, situés sur les côtés, seront notés CN, CS, CE et CO, pour côté nord, côté sud, côté est et côté ouest.

NO	CN	NE
CO		CE
SO	CS	SE

Pour chacune des paires de régions, calculons la probabilité que les deux points se voient, conditionnellement au fait qu'ils appartiennent à ces deux régions. Par symétrie et par des

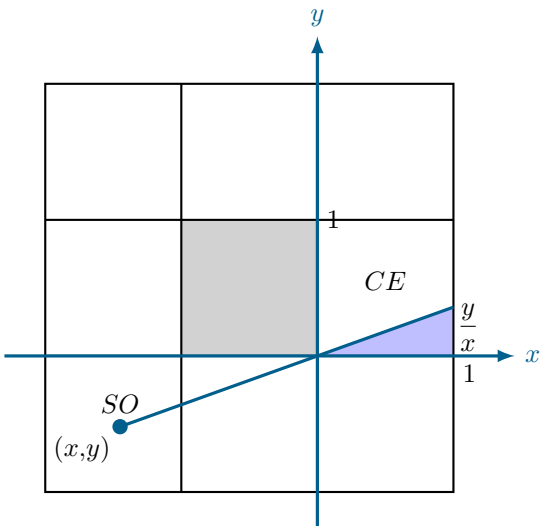
considérations géométriques simples, on obtient le tableau suivant :

	NO	NE	SO	SE	CN	CS	CE	CO
NO	1	1	1	0	1	p	p	1
NE	1	1	0	1	1	p	1	p
SO	1	0	1	1	p	1	p	1
SE	0	1	1	1	p	1	1	p
CN	1	1	p	p	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
CS	p	p	1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
CE	p	1	p	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
CO	1	p	1	p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

Dans ce tableau, il ne reste donc qu'à déterminer la valeur de p.

Pour calculer p, considérons par exemple les régions SO et CE. Plaçons l'origine au coin inférieur gauche de CE, l'axe des x horizontal et orienté vers la droite, et l'axe des y vertical et orienté vers le haut. Ainsi,

$$SO = [-2,-1] \times [-1,0] \qquad \text{et} \qquad CE = [0,1] \times [0,1].$$



Fixons un point $(x,y) \in SO$. La droite passant par (x,y) et par l'origine a pour équation

$$Y = \frac{y}{x} X.$$

Elle délimite, dans CE, la partie visible depuis (x,y). Comme

$$0 \leq \frac{y}{x} \leq 1,$$

cette partie est le triangle de sommets

$$(0,0), \qquad (1,0), \qquad \left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Son aire vaut donc

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{y}{x} = \frac{y}{2x}.$$

Puisque les carrés SO et CE sont tous deux d'aire 1, la probabilité p s'obtient en faisant la moyenne de cette aire lorsque (x,y) parcourt SO. Ainsi,

$$p = \int_{-2}^{-1} \int_{-1}^{0} \frac{y}{2x}\, dy\, dx.$$

L'intégrale se sépare :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx \right) \left(\int_{-1}^{0} y\, dy \right) \\ &= \frac{1}{2}(-\ln 2) \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= \boxed{\frac{\ln 2}{4}}. \end{aligned}$$

Il reste à combiner les valeurs du tableau. Celui-ci contient 32 fois la valeur 1, 8 fois la valeur 0, 8 fois la valeur 1/2 et 16 fois la valeur p. Comme les huit carrés ont la même aire, chacun des 64 couples ordonnés de régions a probabilité 1/64. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{32 + 8\left(\frac{1}{2}\right) + 16p}{64} = \frac{9}{16} + \frac{p}{4}.$$

En remplaçant p par sa valeur, on obtient finalement

$$\boxed{\frac{9 + \ln 2}{16}} \approx 0{,}6058217.$$