Association
mathématique
du Québec

La méthode de bissection stochastique : le hasard fait-il mieux que le milieu ? [1]

Ludovick Bouthat
Philippe-André Luneau
Philippe Petitclerc
Département de mathématiques et statistiques, Université Laval

Résumé

La méthode de bissection est l'un des algorithmes de recherche de racines les plus simples et les mieux compris. Nous en étudions une généralisation naturelle où le point de coupure, plutôt que d'être fixé au milieu de l'intervalle, est tiré aléatoirement selon une distribution arbitraire. Nous déterminons son taux de convergence moyen lorsque la racine est supposée uniformément distribuée dans l'intervalle initial, et montrons qu'il ne dépend de la loi du point de coupure c qu'à travers la quantité $\mathbb{E}[c(1-c)]$. Les prédictions théoriques, fondées sur des arguments probabilistes simples afin de rester accessibles à un large public mathématique, sont finalement confirmées par des simulations numériques.

Mots clés (MSC2020) : 65-01 Exposé introductif sur l'analyse numérique ; 65H05 Méthodes numériques en analyse non linéaire ; 60G10 Processus stochastiques stationnaires ; 37H99 Systèmes dynamiques aléatoires (divers) ; 37A50 Systèmes dynamiques ergodiques aléatoires

1. Introduction

En mathématiques, plusieurs questions reviennent sans cesse sous différentes formes : à quel moment deux quantités deviennent-elles égales ? À partir de quel point une expression passe-t-elle de valeurs positives à des valeurs négatives ? Où une fonction atteint-elle un maximum ? Ces questions, malgré leurs différentes formulations, cachent toutes la même idée : déterminer les *racines* d'une fonction, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles une fonction s'annule.

Bien avant l'apparition de l'algèbre moderne, on trouvait déjà des méthodes pour déterminer les racines d'une fonction. Le *papyrus Rhind*, datant de 1650 avant notre ère, présente 91 problèmes mathématiques variés dont plusieurs consistent à trouver une *quantité* à partir de relations numériques simples [8]. Le problème 26, par exemple, revient à chercher une quantité qui, ajoutée à son quart, donne 15. Cette équation linéaire correspond ainsi dans le langage moderne à trouver la racine de la fonction $f(x) = x + x/4 - 15$.

La solution proposée dans le papyrus Rhind utilise un algorithme systématique : la *méthode regula falsi* (ou *méthode de fausse position*). Celle-ci consiste à essayer une valeur candidate,

1. Ce travail a été soutenu par le CRSNG.

 © Association mathématique du Québec

observer l'écart avec le résultat attendu, puis corriger la valeur candidate proportionnellement. Cette méthode apparaît notamment dans les problèmes 24 à 29 du papyrus Rhind [2, p. 11].

Cet algorithme, couramment utilisé partout dans le monde jusqu'au XVII^{e} siècle [5], repose toutefois sur une hypothèse clé, à savoir l'*existence* même de la racine. Pendant longtemps, l'idée qu'une racine doit exister entre deux valeurs de signes opposés a été traitée comme une évidence géométrique. Si une courbe passe d'une valeur négative à une valeur positive, comment pourrait-elle ne pas traverser l'axe horizontal ? Cette intuition est fondée, mais cache une hypothèse essentielle : la *continuité*.

Cette évidence visuelle ne suffisait toutefois pas au mathématicien polymathe Bernard Bolzano. Celui-ci considérait qu'une preuve en analyse ne devait pas introduire des concepts étrangers au domaine, comme des considérations géométriques ou visuelles. Elle devait montrer, à partir de notions purement analytiques, pourquoi le passage d'une valeur négative à une valeur positive force l'existence d'une valeur intermédiaire nulle. Sa démonstration, publiée en 1817 dans son mémoire *Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation* [1], répond précisément à cette exigence.

La preuve de ce célèbre résultat, aujourd'hui appelé *théorème des valeurs intermédiaires*, repose sur une méthode itérative simple. Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, avec

$$f(a) < 0 \qquad \text{et} \qquad f(b) > 0,$$

alors on veut montrer qu'il existe un point $r \in [a,b]$ tel que $f(r) = 0$.

Pour ce faire, Bolzano commence par couper l'intervalle $[a,b]$ en deux. Si la fonction vaut zéro au milieu, la racine est trouvée. Sinon, le milieu donne une valeur ou bien positive, ou bien négative. On conserve alors la moitié de l'intervalle dont les extrémités sont encore des valeurs de signes opposés. En répétant ce procédé, une suite d'intervalles emboîtés est obtenue, de plus en plus petits, dans lesquels le changement de signe persiste. Comme leur longueur tend vers zéro, ces intervalles se resserrent autour d'un unique point r.

Bolzano argumente que ce point est bien une racine. D'un côté des intervalles, les valeurs de f restent négatives ou nulles ; de l'autre, elles sont positives ou nulles. Or, comme f est continue, les valeurs de la fonction aux deux extrémités doivent tendre vers la même valeur, soit $f(r)$. Comme cette valeur ne peut pas être simultanément strictement négative et strictement positive, elle doit être nulle : r est donc une racine de f.

La preuve de Bolzano marque ainsi un tournant : elle transforme une évidence visuelle en argument rigoureux utilisant uniquement des outils de l'analyse. En découpant progressivement l'intervalle où le changement de signe se produit, Bolzano montre que la racine peut être enfermée dans des intervalles de plus en plus petits. Le résultat est donc un *théorème d'existence*, puisqu'il affirme l'existence d'une racine sans dire où se trouve celle-ci. Toutefois, sa preuve se transpose directement en un algorithme simple pour localiser une racine d'une fonction continue f dans un intervalle donné : la *méthode de bissection*.

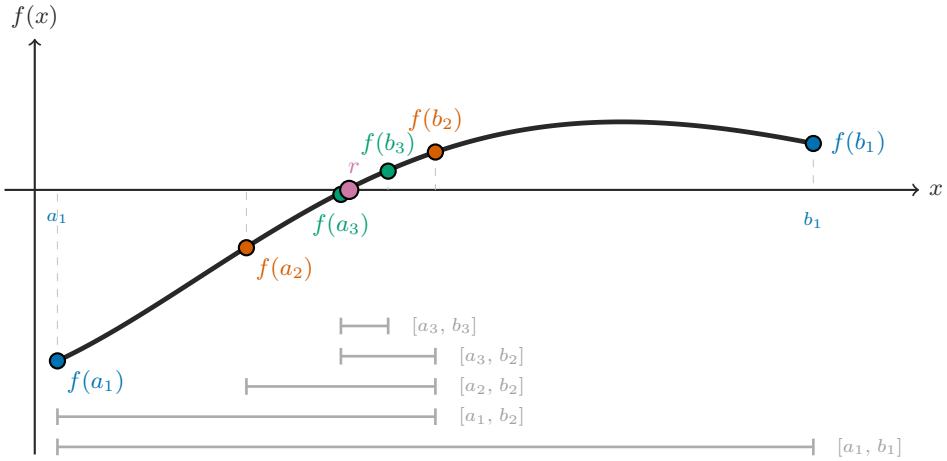

FIGURE 1 – Méthode itérative de la bissection

Dans sa forme classique, la méthode de bissection débute avec un intervalle $[a,b]$, où les valeurs de f sont de signes opposés aux extrémités. À chaque étape, on calcule le point milieu

$$m = \frac{a+b}{2},$$

puis on évalue $f(m)$. On remplace ensuite l'intervalle de départ par la moitié pour laquelle il y a toujours un changement de signe, à savoir $[a,m]$ ou $[m,b]$. Notons que si $f(m) = 0$, alors on choisi arbitrairement l'intervalle$[m,b]$. Après n étapes, l'intervalle obtenu possède une longueur égale à $2^{-n}(b-a)$. Ainsi, même si la racine exacte demeure inconnue, nous pouvons affirmer qu'elle se trouve dans un intervalle dont la taille peut être rendue aussi petite que désiré.

Si les points de coupe c_n sont considérés comme des approximations de la racine r, alors l'erreur $e_n = |c_n - r|$ est toujours bornée supérieurement par la demi-longueur de l'intervalle, c'est-à-dire

$$e_n \leq 2^{-(n+1)}(b-a).$$

Il s'ensuit ainsi que cet algorithme de recherche de racine converge linéairement avec un taux de convergence égal à $1/2$, c'est-à-dire que

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} e_n, \quad \text{ou encore} \quad e_n \approx \frac{1}{2^n} e_0.$$

Malgré le fait que la méthode de bissection est l'un des algorithmes les plus anciens pour trouver une racine d'une fonction continue, elle demeure encore aujourd'hui l'un des plus simples. Plusieurs autres algorithmes découverts depuis, comme la méthode de Newton, convergent nettement plus rapidement (à savoir, quadratiquement plutôt que linéairement). Or, grâce à sa simplicité et au faible nombre d'hypothèses requises pour son application, celle-ci sert souvent de point de comparaison pour évaluer des méthodes de recherche de racines plus sophistiquées.

En particulier, la méthode de bissection est depuis devenue un incontournable de l'analyse numérique et une partie intégrante de l'enseignement de ce domaine au niveau universitaire. C'est dans ce contexte, davantage pédagogique que technique, que le problème de recherche présenté dans cet article a vu le jour.

En effet, en présentant la méthode de bissection à des étudiants, nous avons tenté de motiver l'algorithme en soulevant la question suivante : comment choisir une approximation d'une racine dont nous savons seulement qu'elle se trouve dans un certain intervalle $[a,b]$? De ce point de vue, choisir le point milieu n'est pas la seule option raisonnable : n'importe quel point de l'intervalle pourrait servir de candidat, et choisir un tel point au hasard paraît tout aussi intuitif. Cela soulève immédiatement une question naturelle : que se passe-t-il si la règle déterministe du point milieu est remplacée par un choix aléatoire ?

Cette question est vaste et possède plusieurs facettes. Toutefois, il n'est pas difficile de se convaincre que l'argument de Bolzano demeure valide sous cette variante et donc que l'algorithme associé converge encore vers une racine. Néanmoins, alors qu'il était aisément possible de déduire la longueur de l'intervalle après n étapes de la méthode de bissection, déterminer cette longueur dans le cas de la variante stochastique est un problème beaucoup plus difficile.

Il semble malgré tout raisonnable de penser que, si le point de coupure est choisi selon une distribution symétrique autour du point milieu, la méthode conserve, du moins en moyenne, une partie du comportement de la bissection classique. En effet, l'algorithme de bissection stochastique produit parfois des intervalles plus grands que la méthode classique ne le fait, et parfois des intervalles plus petits (voir la figure 2). Si l'on suppose que la racine est uniformément distribuée sur l'intervalle initial $[a,b]$, on pourrait alors s'attendre à ce que ces deux effets se compensent, et que le taux de convergence moyen coïncide avec celui du cas déterministe. Vérifier cette hypothèse correspond alors à répondre à la question : *en moyenne, sommes-nous plutôt chanceux, malchanceux, ou est-ce que les différents cas s'équilibrent* ?

L'objectif principal de cet article est de répondre à cette question en déterminant explicitement le taux de convergence moyen pour l'algorithme de bissection aléatoire lorsque la racine est initialement distribuée uniformément dans l'intervalle $[a,b]$. Pour ce faire, nous débutons dans la section 2 par introduire formellement l'algorithme que nous appellerons *méthode de bissection stochastique*. Nous rappelons également quelques concepts probabilistes élémentaires afin d'assurer l'accessibilité de nos résultats. Un lecteur familier avec ceux-ci pourra aisément ignorer cette section, quitte à y revenir au besoin.

Ensuite, à l'aide d'arguments probabilistes et géométriques élémentaires, nous obtenons dans la section 3 des formules explicites pour la fonction de répartition du facteur de réduction de l'intervalle à chaque étape de l'algorithme, et nous en déduisons des expressions pour son espérance et sa variance. De plus, nous montrons que la distribution uniforme est invariante pour le processus de position normalisée de la racine, *quelle que soit la distribution des coupures*. En d'autres termes, si l'on suppose la racine uniformément distribuée sur l'intervalle initial $[a,b]$, alors elle le sera encore sur tous les intervalles plus petits obtenus par le processus itératif. Ces résultats nous permettent ainsi de formuler des expressions explicites pour le taux de convergence moyen de la méthode de bissection stochastique, dépendant seulement de la quantité $\mathbb{E}[c(1-c)]$, et donc de répondre à la question formulée dans le titre de cet article.

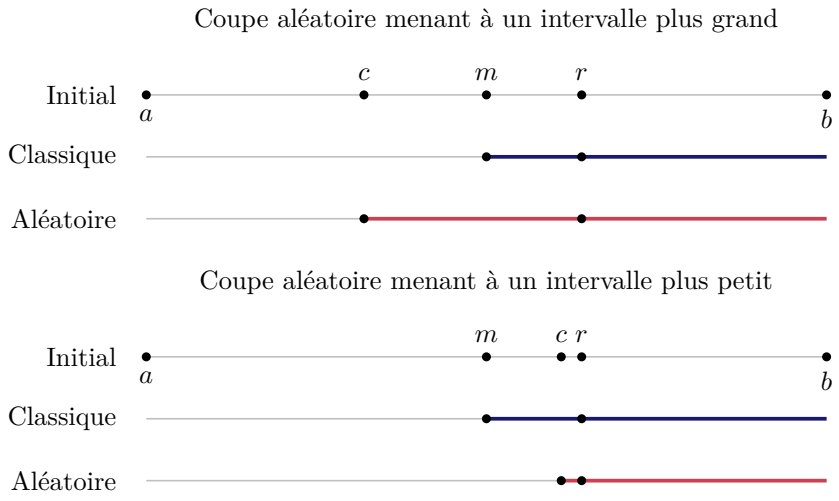

FIGURE 2 – Comparaison de l'intervalle conservé selon le point de coupe et la méthode considérée

Ces résultats sont finalement illustrés numériquement dans la section 4. En considérant différentes caractéristiques qualitatives des distributions du point de coupe, comme l'asymétrie ou la concentration de la masse, les expériences numériques présentées permettent d'évaluer la robustesse du comportement de convergence prédit et d'illustrer certaines tendances générales dans la performance de l'algorithme.

2. Rappels et définitions

2.1. La méthode de bissection stochastique

Considérons une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possédant une racine r, c'est-à-dire telle que $f(r) = 0$, où la valeur de r est inconnue. La méthode de bissection permet d'approximer la valeur de r, dès lors que cette racine se trouve dans un intervalle $[a,b]$ où la fonction f prend des signes opposés aux deux extrémités. On définit alors la *fonction de coupe* comme le point milieu de l'intervalle :

$$\text{coupe}(a,b) = \frac{a+b}{2}.$$

La variante stochastique considérée dans cet article est analogue à la méthode de bissection classique, à une modification essentielle près : les points de coupe c_n, plutôt que d'être toujours le milieu de l'intervalle, sont tirés aléatoirement selon une distribution $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $[a_n,b_n]$:

$$\text{coupe}(a_n,b_n) = c_n \sim \mathcal{D}(a_n,b_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Algorithme 1 Méthode de bissection

Entrée : a,b t.q. $a < b$, f t.q. $f(a)f(b) < 0$ ayant une racine $r \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$, $N > 0$
Sortie : $r \in [a_n,b_n]$

```
n ← 0
a_n ← a
b_n ← b
tant que b_n − a_n ≥ ε et n < N faire
    c_n ← coupe(a_n,b_n)
    si f(a_n)f(c_n) < 0 alors
        a_{n+1} ← a_n
        b_{n+1} ← c_n
    sinon
        a_{n+1} ← c_n
        b_{n+1} ← b_n
    fin si
    n ← n + 1
fin tant que
retourne [a_n,b_n]
```

L'objectif principal de cet article est de déterminer le *taux de convergence moyen* d'une telle méthode. Sans perte de généralité, l'intervalle initial est choisi comme étant [0,1], puisqu'une fonction possédant une racine dans $[a,b]$ peut être ramenée, par une transformation affine, à une fonction dont la racine se trouve dans [0,1]. Pour simplifier l'analyse des points de coupe et des extrémités, nous étudions l'algorithme 2 plutôt que l'algorithme 1. Cet algorithme est essentiellement équivalent au précédent, à la différence près qu'après chaque itération, l'intervalle conservé est renormalisé vers [0,1]. La racine est donc elle aussi exprimée à chaque étape par sa position relative dans le nouvel intervalle.

Notons que l'algorithme 2 n'est pas destiné à être utilisé en pratique, puisque la valeur de r est généralement inconnue. De plus, on remarque que l'algorithme s'applique également aux fonctions ayant plusieurs racines dans $[a,b]$, mais nous supposerons ici par simplicité que la racine est unique. Finalement, à des fins de clarté, nous notons que la transformation de normalisation dans l'algorithme 2 peut être explicitée sous la forme $r_{n+1} = T(c_n,r_n)$, où

$$T(c,r) = \begin{cases} \frac{r}{c} & \text{si } c \geq r, \\ \frac{r-c}{1-c} & \text{si } c < r. \end{cases} \tag{1}$$

Bien que ce ne soit pas nécessaire pour notre analyse, nous notons pour le lecteur intéressé que cette transformation correspond à l'application dyadique asymétrique [10], avec paramètre c (voir la figure 3). L'itération de l'*application dyadique* dans le cas $c = 1/2$ est un système dynamique chaotique bien connu, topologiquement mélangeant [6, 9]. Cette dernière propriété découle du fait que T dilate les deux sous-intervalles $[0,c]$ et $[c,1]$ vers [0,1], mélangeant ainsi les points issus de part et d'autre de la coupure.

Algorithme 2 Méthode de bissection normalisée

Entrée : Un point $r \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$, $N > 0$
Sortie : ℓ_n et L_n, le facteur de normalisation et la longueur de l'intervalle à l'étape n, resp.

```
n ← 0
a_n ← 0
b_n ← 1
ℓ_n ← ∞
L_n ← 1
r_n ← r
tant que L_n ≥ ε et n < N faire
    c_n ← coupe(0,1)
    si c_n > r_n alors
        a_{n+1} ← 0
        b_{n+1} ← c_n
    sinon
        a_{n+1} ← c_n
        b_{n+1} ← 1
    fin si
    r_{n+1} ← (r_n − a_{n+1}) / (b_{n+1} − a_{n+1})      ▷ Normalisation de la racine dans l'intervalle [0,1]
    ℓ_{n+1} ← (b_{n+1} − a_{n+1})
    L_{n+1} ← ℓ_{n+1} L_n
    n ← n + 1
fin tant que
retourne ℓ_n, L_n
```

2.2. Rappels de probabilité

Une variable aléatoire X formalise une quantité soumise au hasard. À chaque *événement* associé à X, par exemple « la valeur de X se trouve entre $1/2$ et $3/4$ », on attribue une valeur entre 0 et 1, appelée *probabilité*. Une probabilité de 1 signifie que l'événement est presque certain, tandis qu'une probabilité de 0 signifie qu'il est presque impossible. [2]

Une variable aléatoire est décrite par sa *fonction de répartition*, qui dicte la probabilité que X appartienne à un intervalle donné. Plus précisément, la fonction de répartition F est définie par

$$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x],$$

à savoir la probabilité que la valeur de X soit inférieure ou égale à x. Cette probabilité sera dictée par la *loi* de X, par exemple, la loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ sur $[0,1]$, pour laquelle $\mathbb{P}[X \leq x] = x$.

Les variables aléatoires considérées dans cet article prennent toujours leurs valeurs dans $[0,1]$.

2. Les notions de presque certain et presque impossible font référence au concept d'événements de mesure nulle. Formellement, un événement de probabilité 0 n'est pas impossible, mais son poids est négligeable au sens de l'intégration. C'est pourquoi on dit qu'un événement de probabilité 1 se réalise « presque sûrement ».

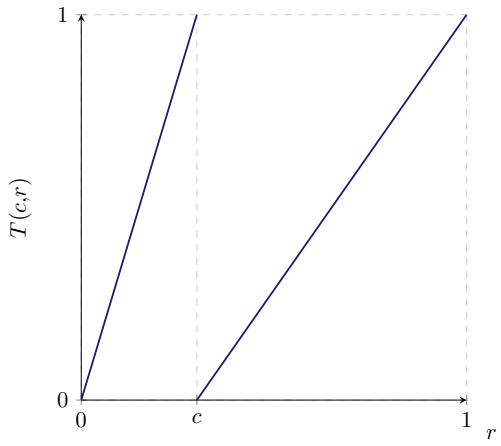

FIGURE 3 – L'application dyadique asymétrique de paramètre c

Pour de telles variables aléatoires, la fonction de répartition est :

- *non négative* : la probabilité qu'un événement se produise est positive ou nulle ;
- *non décroissante* : plus l'intervalle dans lequel X est choisi est grand, plus l'événement est probable ;

De plus, elle satisfait toujours $F(1) = 1$, puisque l'événement $X \leq 1$ est assurément réalisé.

Si F est dérivable, alors la *fonction de densité* de X est définie par $f = F'$. Les régions où f est plus élevée correspondent alors à des valeurs de X plus probables. La fonction de densité permet de donner à la probabilité une interprétation géométrique simple. Lorsqu'une variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[0,1]$ et admet une densité f, la probabilité d'un événement ne correspond pas seulement à la taille de l'ensemble considéré, mais à son poids sous la densité. Ainsi, pour un sous-ensemble $A \subseteq [0,1]$, on a

$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, cette probabilité est l'aire sous la courbe de f au-dessus de l'ensemble A. En particulier, on a $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}[X \in [0,1]] = 1$. Ainsi, chaque aire partielle $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$ représente la proportion de masse contenue dans la région correspondante. Par exemple, si X est une variable aléatoire dont la fonction de densité est f et si $A = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, alors

$$\mathbb{P}[X \in A] = \int_0^{1/3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2/3}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 1. *Si plusieurs ensembles sont disjoints, alors la probabilité que X soit dans l'union de ceux-ci est égale à la somme des probabilités individuelles sur chaque ensemble. Dans le cas contraire, il ne faut pas intégrer plusieurs fois sur la même région, sinon la probabilité sera surestimée ; c'est le principe d'inclusion-exclusion (voir la Figure 4).*

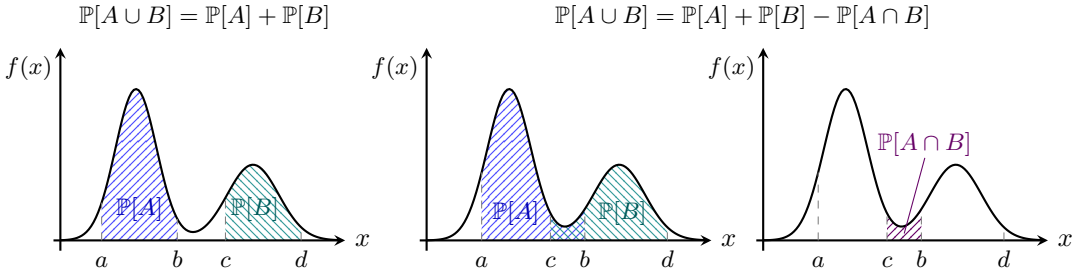

FIGURE 4 – Probabilité de l'événement « A ou B », où $A = \{X \in [a,b]\}$ et $B = \{X \in [c,d]\}$. À gauche, quand les événements sont disjoints. À droite, quand ils ne le sont pas.

L'*espérance* (ou la *moyenne*) est une mesure de la position des valeurs possibles de X ; la *variance* est une mesure de dispersion quantifiant à quel point les valeurs de X s'éloignent de la moyenne. Ces concepts sont respectivement notés et définis par

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \sigma^2 = \mathrm{Var}[X] = \int_0^1 (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La *probabilité conditionnelle* de l'événement « A sachant B » est la probabilité que l'événement A se réalise, sachant que B s'est produit. Géométriquement, cette probabilité est égale au rapport entre l'aire de l'intersection des événements A et B et l'aire totale de l'événement B, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}[A \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}. \tag{2}$$

L'*espérance conditionnelle* est une notion d'espérance qui tient compte de la connaissance d'un événement. Soit un évènement A de probabilité non-nulle, par exemple, $X \in [a,b]$. Alors

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

c'est-à-dire l'espérance de X restreinte à A, normalisée par la probabilité de A. Si l'événement A se décompose en événements disjoints, à savoir $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ où $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, alors la *loi de l'espérance totale* affirme que l'espérance conditionnelle est égale à

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \frac{1}{\mathbb{P}[A]} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i]\,\mathbb{E}[X \mid A_i]. \tag{4}$$

Deux événements A et B sont dits *indépendants* si $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$. Intuitivement, cela signifie que la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de réalisation de l'autre. En effet, par l'équation (2), cette relation est équivalente à $\mathbb{P}[A \mid B] = \mathbb{P}[A]$, c'est-à-dire que savoir que B s'est réalisé ne fournit aucune information supplémentaire sur la probabilité que A se réalise.

Il est souvent utile d'étudier les relations entre plusieurs variables aléatoires, surtout lorsqu'elles sont dépendantes. Considérons X et Y deux variables à valeurs dans [0,1]. Leur *fonction de répartition jointe* est définie par $F(x,y) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y]$. Lorsque X et Y sont dépendantes, la probabilité jointe ne se factorise généralement pas : $\mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y] \neq \mathbb{P}[X \leq x]\mathbb{P}[Y \leq y]$. Si une densité jointe existe, cette probabilité s'interprète géométriquement comme l'aire pondérée d'une région de $[0,1]^2$. La dépendance signifie alors que cette aire ne peut généralement pas se décomposer en un produit de deux intégrales.

Afin d'énoncer nos résultats dans toute leur généralité, nous devons permettre que les variables aléatoires considérées n'admettent pas nécessairement de densité. Cette précaution est importante : certaines distributions naturelles dans notre contexte sont continues, comme la loi uniforme, mais d'autres peuvent être discrètes ou même déterministes. Par exemple, la méthode de bissection classique correspond au cas où le point de coupe vaut toujours $1/2$. Cette situation est modélisée par une variable aléatoire prenant toujours une valeur unique et ne possèdant pas de densité au sens usuel, car toute la masse probabiliste est concentrée en un seul point. Malgré tout, elle a pour fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/2, \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pour traiter tous ces cas simultanément, nous utilisons l'intégrale de Lebesgue–Stieltjes. Malgré la terminologie pouvant sembler intimidante, l'idée est relativement simple : remplacer l'intégration par rapport à une densité $f(x)\,\mathrm{d}x$ par une intégration directement par rapport à la fonction de répartition F. Ainsi, pour toute fonction bornée g pour laquelle l'espérance est bien définie, on écrit

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}F(x).$$

Cette notation signifie que l'on « additionne » (au sens infinitésimal) toutes les valeurs de $g(x)$ en les pondérant par la masse de probabilité attribuée à chaque région par la loi de X.

Lorsque F est dérivable et admet une densité f, on retrouve simplement la formule familière

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 g(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans le cas discret, l'intégrale de Lebesgue–Stieltjes se comporte plutôt comme une somme pondérée : si X prend les valeurs x_i avec probabilités p_i, alors

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}F(x) = \sum_i g(x_i)p_i. \tag{5}$$

Ainsi, les parties continues de F contribuent comme des aires sous une densité, tandis que ses sauts contribuent comme des masses ponctuelles. Par exemple, si X est déterministe et vaut toujours $1/2$, alors toute la masse est concentrée en $1/2$, et l'intégrale vaut simplement

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}F(x) = g(1/2).$$

L'intégrale de Lebesgue–Stieltjes fournit donc une notation unifiée qui couvre tous les types de distributions. Elle nous permet ainsi de formuler nos résultats sans imposer inutilement l'existence d'une densité. Toutefois, un lecteur moins familier avec cette notation peut aisément interpréter toutes les preuves dans le cas continu en remplaçant $\mathrm{d}F(x)$ par $f(x)\,\mathrm{d}x$ et dans le cas discret en utilisant l'identité (5).

3. L'algorithme aléatoire, étape par étape

3.1. La longueur de l'intervalle après une itération

En théorie, étant donné une fonction f, la racine r que l'on cherche à identifier à l'aide de l'algorithme de bissection stochastique est fixée et, donc, déterministe. Toutefois, en pratique, la racine r est inconnue et se comporte, sur plusieurs exécutions de l'algorithme, comme une variable aléatoire de distribution inconnue dans l'intervalle (0,1).

Par simplicité, et pour des raisons élégantes qui deviendront bientôt claires, nous supposons ici que la racine initiale r est uniformément distribuée sur (0,1), c'est-à-dire que $r = r_0 \sim \mathcal{U}(0,1)$. De plus, les points de coupe c_n sont choisis indépendamment des racines normalisées r_n, selon une distribution ayant la fonction de répartition F. En suivant l'algorithme 2, nous pouvons déduire que la longueur de l'intervalle après la première coupe est donnée par

$$\ell_1 = \begin{cases} c_0 & \text{si } c_0 \geq r_0, \\ 1 - c_0 & \text{si } c_0 < r_0. \end{cases} \tag{6}$$

En supposant la valeur de r_0 connue, la loi de l'espérance totale (4) nous assure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ell_1 \mid r_0] &= \mathbb{P}[c_0 \geq r_0]\,\mathbb{E}[\ell_1 \mid c_0 \geq r_0] + \mathbb{P}[c_0 < r_0]\,\mathbb{E}[\ell_1 \mid c_0 < r_0] \\ &= \mathbb{P}[c_0 \geq r_0]\,\mathbb{E}[c_0 \mid c_0 \geq r_0] + \mathbb{P}[c_0 < r_0]\,\mathbb{E}[1 - c_0 \mid c_0 < r_0] \\ &= \int_{r_0}^{1} c\,\mathrm{d}F(c) + \int_{0}^{r_0} (1-c)\,\mathrm{d}F(c), \end{aligned}$$

où la dernière identité provient de l'équation (3). Prendre l'espérance de cette expression par rapport à la distribution de r_0 nous donne le facteur d'échelle moyen après la première coupe.

Exemple 1. *Supposons que $c \sim \mathcal{U}(0,1)$, à savoir que la coupe est choisie uniformément sur (0,1). Alors la fonction de répartition est $F(x) = x$ et on a donc $\mathrm{d}F(x) = \mathrm{d}x$. Par conséquent,*

$$\mathbb{E}[\ell_1 \mid r_0] = \frac{1 + 2r_0 - 2r_0^2}{2}.$$

La longueur moyenne de l'intervalle après la première coupe aléatoire dépend ainsi de la position de la racine (voir la figure 5). En prenant l'espérance par rapport à $r_0 \sim \mathcal{U}(0,1)$, on obtient alors un facteur de contraction moyen $\mathbb{E}[\ell_1] = 2/3$.

Exemple 2. *Supposons que* $c \sim \text{Beta}(2;\,3)$. *Alors*

$$\mathbb{E}[\ell_1 \mid r_0] = \frac{2 + 30r_0^2 - 80r_0^3 + 75r_0^4 - 24r_0^5}{5}$$

La distribution du facteur d'échelle espéré en fonction de r_0 *est représentée à la figure 6. En prenant l'espérance par rapport à* $r_0 \sim \mathcal{U}(0,1)$, *on obtient* $\mathbb{E}[\ell_1] = 3/5$.

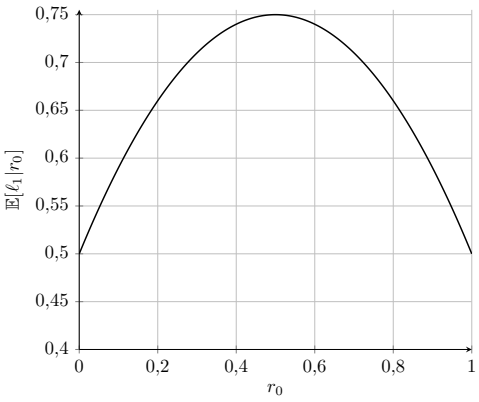

FIGURE 5 – Longueur moyenne après une itération si $c_0 \sim \mathcal{U}(0,1)$.

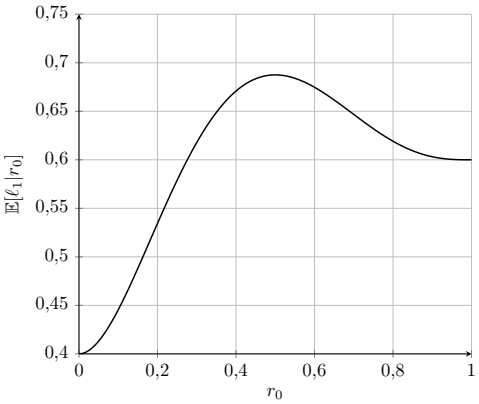

FIGURE 6 – Longueur moyenne après une itération si $c_0 \sim \text{Beta}(2;\,3)$.

Remarquons que, si r_0 est uniformément distribuée sur (0,1), alors après une première étape, l'espérance $\mathbb{E}[\ell_1]$ ne dépend que de la distribution du point de coupe. Par conséquent, si la racine normalisée r_1 demeurait elle aussi uniforme sur (0,1), les mêmes arguments s'appliqueraient aux étapes suivantes. En particulier, le facteur de contraction moyen $\mathbb{E}[\ell_n]$ resterait donc constant tout au long de l'algorithme.

3.2. L'invariance de la distribution uniforme

La proposition suivante montre que l'hypothèse formulée ci-dessus est effectivement valide. Plus précisément, nous montrons dans ce qui suit que si $r_n \sim \mathcal{U}(0,1)$, alors la distribution de r_{n+1} est elle aussi uniforme sur (0,1) après normalisation.

Proposition 1. *Si* $r_0 \sim \mathcal{U}(0,1)$, *alors* $r_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ *pour tout* $n \geq 1$. *Autrement dit,* $\mathcal{U}(0,1)$ *est une distribution stationnaire pour le processus aléatoire décrit dans l'algorithme 2.*

Démonstration. Considérons la fonction $T(c,r)$, définie en (1), permettant de calculer r_{n+1} à partir de r_n. Par définition, la racine $r_1 = T(c_0,r_0)$ sera uniformément distribuée si $\mathbb{P}[T(c_0,r_0) \leq t] = t$ pour tout $t \in [0,1]$. Soit $L_t^-(T) = \{(c_0,r_0) : T(c_0,r_0) \leq t\}$ l'ensemble des points (c_0,r_0)

tels que $T(c_0,r_0) \leq t$. Comme mentionné à la section 2.2, le calcul de la probabilité revient à calculer l'aire pondérée d'un sous-ensemble de $[0,1]^2$. Cet ensemble, illustré à la figure 7, admet la description géométrique suivante :

$$L_t^-(T) = \big\{(c_0,r_0) : c_0 \in [0,1], r_0 \in [0,tc_0]\big\} \cup \big\{(c_0,r_0) : c_0 \in [0,1], r_0 \in (c_0, t+(1-t)c_0]\big\}.$$

Par conséquent, puisque $\int_0^1 \mathrm{d}F(c) = 1$, il découle de la définition que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(T(c_0,r_0) < t\big) &= \int_{L_t^-(T)} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}F(c) \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{tc} \mathrm{d}r + \int_c^{t+(1-t)c} \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}F(c) \\
&= \int_0^1 \big(tc + t + (1-t)c - c\big)\,\mathrm{d}F(c) \\
&= t \int_0^1 \mathrm{d}F(c) \\
&= t.
\end{aligned}$$

Ainsi, $r_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$. Comme l'argument ne dépend pas de n, la même méthode peut être appliquée récursivement afin de montrer que $r_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ pour tout $n \geq 1$, démontrant donc que $\mathcal{U}(0,1)$ est une distribution stationnaire pour l'algorithme. ■

Notons que la stationnarité de $\mathcal{U}(0,1)$ pour le processus aléatoire décrit dans l'algorithme 2 tient quelle que soit la fonction de répartition F. Ainsi, à chaque étape du processus, la racine renormalisée r_n suit toujours une distribution uniforme sur $[0,1]$, indépendamment de la distribution choisie pour le point de coupe.

Cette remarquable invariance a des conséquences profondes pour notre problème. En particulier, le corollaire suivant découle alors de ce qui a été présenté dans la section 3.1.

Corollaire 1. *Supposons que $r \sim \mathcal{U}(0,1)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que les variables aléatoires ℓ_n générées par l'algorithme 2 satisfont $\mathbb{E}[\ell_n] = C$ pour tout $n \geq 1$, où la constante C dépend uniquement de la distribution $\mathcal{D}$ choisie pour les points de coupe.*

Par exemple, dans le cas où $\mathcal{D} = \mathcal{U}(0,1)$, l'**??** 1 implique que $\mathbb{E}[\ell_n] = \frac{2}{3}$ pour tout $n \geq 1$.

3.3. La distribution de ℓ_n

Le corollaire 1 révèle que l'espérance $\mathbb{E}[\ell_n]$ est constante pour tout $n \geq 1$. Nous cherchons maintenant à déterminer une formule générale pour $\mathbb{E}[\ell_n]$, en fonction d'une distribution arbitraire du point de coupe, c'est-à-dire

$$\text{coupe}(0,1) = c \sim \mathcal{D}(0,1).$$

Pour ce faire, nous commençons par établir une formule pour la fonction de répartition et pour la densité, lorsqu'elle existe, des variables aléatoires ℓ_n.

En particulier, nous montrons que les variables aléatoires ℓ_n possèdent une distribution étroitement liée à celle des points de coupe c_n.

Théorème 1. *Supposons que $r \sim \mathcal{U}(0,1)$ et que c soit une variable aléatoire de fonction de répartition F. Définissons ℓ selon la relation (6). Alors la fonction de répartition de ℓ est*

$$H(t) = \int_0^t x \,\mathrm{d}F(x) + \int_{1-t}^1 (1-x)\,\mathrm{d}F(x).$$

De plus, si c admet une densité de probabilité f, alors ℓ a une densité de probabilité donnée par

$$h(t) = t\big(f(t) + f(1-t)\big).$$

Démonstration. Nous calculons d'abord la fonction de répartition de ℓ. Soit $t \in [0,1]$. Par définition, on a $H(t) = \mathbb{P}[\ell \le t]$. Puisque

$$\ell = \begin{cases} c & \text{si } \ c \ge r, \\ 1-c & \text{si } \ c < r, \end{cases}$$

on obtient

$$\{(c,r) : \ell \le t\} = \{(c,r) : r \le c \le t\} \cup \{(c,r) : 1-t \le c < r\}.$$

Ces deux événements sont disjoints, comme l'illustre la figure 8. Par conséquent,

$$H(t) = \mathbb{P}[r \le c \le t] + \mathbb{P}[1-t \le c < r].$$

Comme $r \sim \mathcal{U}(0,1)$, on a $\mathbb{P}[r \le x \mid c = x] = x$. Ainsi,

$$\mathbb{P}[r \le c \le t] = \int_0^t \mathbb{P}[r \le x \mid c = x]\,\mathrm{d}F(x) = \int_0^t x \,\mathrm{d}F(x).$$

De même, en conditionnant à nouveau sur $c = x$, on a $\mathbb{P}[x \le r \mid c = x] = 1 - x$, d'où

$$\mathbb{P}[1-t \le c < r] = \int_{1-t}^1 \mathbb{P}[x < r \mid c = x]\,\mathrm{d}F(x) = \int_{1-t}^1 (1-x)\,\mathrm{d}F(x).$$

En combinant les deux termes, on obtient donc finalement

$$H(t) = \int_0^t x \,\mathrm{d}F(x) + \int_{1-t}^1 (1-x)\,\mathrm{d}F(x), \qquad 0 \le t \le 1.$$

De plus, si c admet une densité f, alors $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$. En dérivant par rapport à t, on trouve finalement que ℓ admet la densité

$$h(t) = H'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1-t}^1 (1-x) f(x)\,\mathrm{d}x \right) = t f(t) + t f(1-t),$$

concluant ainsi la preuve. ■

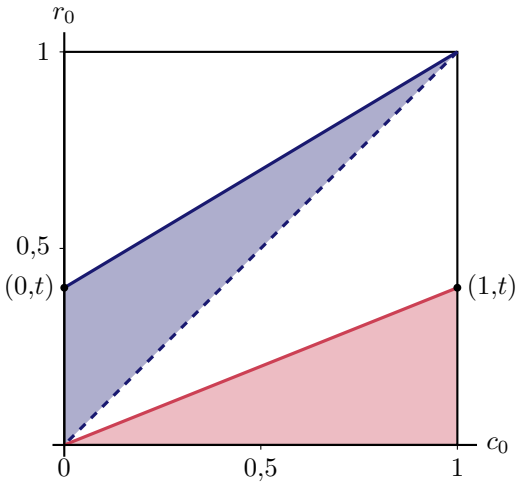

FIGURE 7 – La région $L_t^-(T)$. La section rouge correspond au cas $c_0 \geq r_0$ et la section bleue correspond au cas $c_0 < r_0$.

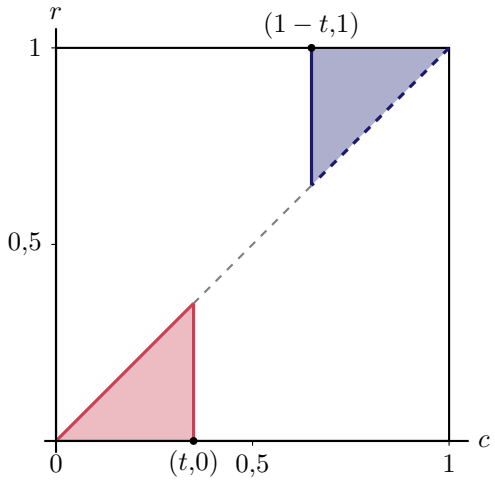

FIGURE 8 – La région $\{(c,r) : \ell \leq t\}$. La section rouge correspond au cas $c \geq r$ et la section bleue correspond au cas $c < r$.

Rappelons que nous cherchons à calculer $\mathbb{E}[\ell_n]$ pour une distribution arbitraire du point de coupe. Le théorème précédent mène à une formule explicite pour cette espérance, ainsi que pour la variance de ℓ_n. Étonnamment, la moyenne et la variance de la variable aléatoire ℓ peuvent toutes deux s'exprimer simplement comme des polynômes de la quantité $\mu - \mu^2 - \sigma^2 = \mathbb{E}[c(1-c)]$.

Corollaire 2. *Supposons que $r \sim \mathcal{U}(0,1)$ et que c soit une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. De plus, notons $\theta := \mu - \mu^2 - \sigma^2$. Alors*

$$\mu_\ell = 1 - 2\theta \qquad \textit{et} \qquad \sigma_\ell^2 = \theta(1 - 4\theta).$$

Démonstration. Nous commençons par établir l'identité pour μ_ℓ. Puisque

$$H(t) = \int_0^t x \, \mathrm{d}F(x) + \int_{1-t}^1 (1-x) \, \mathrm{d}F(x),$$

il découle d'un simple changement de variable et du théorème fondamental du calcul que

$$\mathrm{d}H(t) = t \, \mathrm{d}F(t) + t \, \mathrm{d}F(1-t).$$

Ainsi, par le théorème 1 et un second changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}\mu_\ell &= \int_0^1 x \,\mathrm{d}H(x) \\ &= \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}F(x) + \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}F(1-x) \\ &= \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}F(x) + \int_0^1 (1-x)^2 \,\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_0^1 \big(1 - 2x + 2x^2\big) \,\mathrm{d}F(x).\end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}F(x) = \mu^2 + \sigma^2$, il s'ensuit que

$$\mu_\ell = 1 - 2\mu + 2(\mu^2 + \sigma^2) = 1 - 2(\mu - \mu^2 - \sigma^2) = 1 - 2\theta.$$

Pour la variance, un argument similaire révèle que

$$\begin{aligned}\sigma_\ell^2 + \mu_\ell^2 &= \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}H(x) \\ &= \int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}F(x) + \int_0^1 (1-x)^3 \,\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_0^1 \big(3x^2 - 3x + 1\big) \,\mathrm{d}F(x) \\ &= 3(\mu^2 + \sigma^2) - 3\mu + 1 \\ &= 1 - 3\theta.\end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve alors finalement

$$\sigma_\ell^2 = 1 - 3\theta - \mu_\ell^2 = 1 - 3\theta - (1-2\theta)^2 = \theta(1-4\theta),$$

concluant ainsi la preuve. ■

Remarquons que, dans le cas particulièrement naturel où les points de coupe sont tirés d'une distribution symétrique, alors $\mu = \frac{1}{2}$ et on obtient l'élégant résultat

$$\mu_{\ell_n} = \frac{1}{2} + 2\sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma_{\ell_n}^2 = \sigma^2(1 - 4\sigma^2), \qquad n \geq 1.$$

Ainsi, pour ces distributions, la longueur de l'intervalle est réduite à chaque étape de l'algorithme par un facteur moyen de $\frac{1}{2} + 2\sigma^2$. Ce facteur est minimal lorsque $\sigma^2 \to 0$, ce qui correspond précisément au cas de la méthode de bissection classique. La figure 9 illustre graphiquement les relations obtenues pour μ_ℓ et σ_ℓ^2 dans ce cas.

3.4. La longueur moyenne L_n

La variable aléatoire L_n générée par l'algorithme 2 correspond à la longueur de l'intervalle après n itérations. Cette longueur est l'objet principal d'intérêt pour cet article, puisqu'elle fournit une borne supérieure sur l'erreur de l'approximation donnée par la méthode de bissection stochastique. Dans cet article, le taux de convergence moyen désigne donc le comportement de l'espérance de la longueur de l'intervalle, et non le taux presque sûr souvent associé à $\mathbb{E}[\log \ell]$.

Naturellement, puisqu'à chaque étape de l'algorithme, l'intervalle est réduit en moyenne d'un facteur $\mu_{\ell_n} = 1 - 2\theta$, il est tentant de croire que la longueur moyenne de l'intervalle après n itérations est de

$$\mathbb{E}[L_n] = \mathbb{E}[(b-a)\cdot \ell_1 \cdot \ell_2 \cdots \ell_n] = (b-a)\,\mathbb{E}[\ell_1]\,\mathbb{E}[\ell_2]\,\cdots\,\mathbb{E}[\ell_n] = (b-a)\big(1-2\theta\big)^n.$$

Or, la seconde égalité ci-dessus n'est pas automatique. Toutefois, il suffit que les facteurs de contraction ℓ_n soient mutuellement indépendants pour que celle-ci tienne toujours. Bien que cette propriété peut sembler naturelle, sa validité n'est pas triviale et demande à être démontrée.

Théorème 2. *Supposons que $r \sim \mathcal{U}(0,1)$. Alors*

(i) r_n est indépendante de ℓ_n pour tout $n > 0$;

(ii) les variables aléatoires $\ell_1, \ell_2, \ldots,$ sont mutuellement indépendantes.

Démonstration. Nous cherchons à calculer la probabilité $\mathbb{P}[r_1 \le t, \ell_1 \le u]$ et à montrer que la loi jointe de r_1 et ℓ_1 se factorise sous la forme

$$\mathbb{P}[r_1 \le t, \ell_1 \le u] = \mathbb{P}[r_1 \le t]\,\mathbb{P}[\ell_1 \le u],$$

démontrant ainsi que r_1 et ℓ_1 sont indépendantes. Puisque les événements $\{r_0 \le c_0\}$ et $\{r_0 > c_0\}$ sont disjoints, il est possible de décomposer cette probabilité en deux termes (voir remarque 1) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[r_1 \le t, \ell_1 \le u] &= \mathbb{P}[r_1 \le t, \ell_1 \le u, r_0 \le c_0] + \mathbb{P}[r_1 \le t, \ell_1 \le u, r_0 > c_0] \\ &= \mathbb{P}[c_0 \le u, r_0 \le tc_0] + \mathbb{P}[1-u \le c_0, r_0 \le t(1-c_0)+c_0, r_0 > c_0] \\ &= \mathbb{P}[c_0 \le u, r_0 \le tc_0] + \mathbb{P}[1-u \le c_0 < r_0 \le t(1-c_0)+c_0].\end{aligned}$$

Le premier terme correspond à la région triangulaire $\big\{c_0 \in [0,u], r_0 \in [0,tc_0]\big\}$ illustrée en rouge à la figure 10. Puisque c_0 et r_0 sont indépendantes, et puisque $r_0 \sim \mathcal{U}(0,1)$, on trouve alors

$$\mathbb{P}[c_0 \le u, r_0 \le tc_0] = \int_0^u \mathbb{P}[r_0 \le tc_0 \mid c_0 = c]\,\mathrm{d}F(c) = t\int_0^u c\,\mathrm{d}F(c).$$

Le second terme correspond également à une région triangulaire dans le carré unité, caractérisée par $\big\{c_0 \in [1-u,1], r_0 \in (c_0, t(1-c_0)+c_0]\big\}$. Ainsi, puisque r_0 est uniforme sur $(0,1)$, on a

$$\mathbb{P}[c_0 < r_0 \le t(1-c_0)+c_0 \mid c_0] = t(1-c_0)+c_0-c_0 = t(1-c_0).$$

Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[1-u \le c_0 < r_0 \le t(1-c_0)+c_0] &= \int_{1-u}^{1} \mathbb{P}[c_0 < r_0 \le t(1-c_0)+c_0 \mid c_0 = c]\,\mathrm{d}F(c) \\ &= t\int_{1-u}^{1} (1-c)\,\mathrm{d}F(c).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[r_1 \le t, \ell_1 \le u] &= t\left(\int_0^u c\,\mathrm{d}F(c) + \int_{1-u}^{1} (1-c)\,\mathrm{d}F(c)\right) \\ &= tH(u) \\ &= \mathbb{P}[r_1 < t]\,\mathbb{P}[\ell_1 < u],\end{aligned}$$

où H est la fonction de répartition de ℓ obtenue au théorème 1. Ainsi, r_1 et ℓ_1 sont indépendantes. De plus, pour tout $n \ge 1$, nous avons les propriétés suivantes :

1. $r_n \sim \mathcal{U}(0,1)$, par la proposition 1 ;
2. c_n a pour fonction de répartition F ;
3. c_n est indépendante de r_n.

Le calcul précédent peut donc être répété, *mutatis mutandis*, avec (r_{n+1},ℓ_{n+1}) à la place de (r_1,ℓ_1). On obtient ainsi que r_{n+1} et ℓ_{n+1} sont indépendantes pour tout $n > 0$.

Il reste à établir l'indépendance mutuelle des variables ℓ_n. Pour ce faire, on procède par induction forte, en montrant simultanément que $\ell_1,\ldots,\ell_n$ sont indépendantes et que r_n est indépendante du vecteur $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$.

Le cas initial découle du calcul précédent. Supposons maintenant le résultat vrai jusqu'au rang n. Puisque c_n est choisie indépendamment de tout ce qui a été généré auparavant, et puisque r_n est indépendante de $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ par hypothèse d'induction, le couple (r_n,c_n) est indépendant de $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$. Or,

$$\ell_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } c_n \ge r_n, \\ 1-c_n & \text{si } c_n < r_n, \end{cases}$$

dépend uniquement de r_n et de c_n. Il s'ensuit que ℓ_{n+1} est indépendante de $\ell_1,\ldots,\ell_n$.

De plus, le même argument montre que r_{n+1} est indépendante de ℓ_{n+1}, tandis que le couple (r_{n+1},ℓ_{n+1}), étant une fonction de (r_n,c_n), est indépendant de $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$. Ainsi, r_{n+1} est indépendante de $(\ell_1,\ldots,\ell_n,\ell_{n+1})$. L'hypothèse d'induction est donc propagée au rang $n+1$, démontrant que les variables ℓ_n sont mutuellement indépendantes. ■

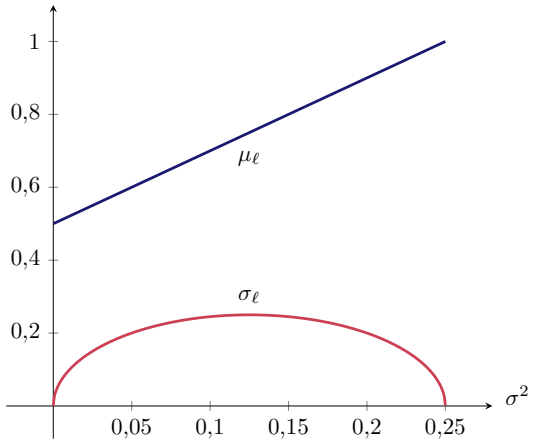

FIGURE 9 – La moyenne μ_ℓ et l'écart-type σ_ℓ de la variable aléatoire $\ell = \ell(c,r)$, exprimés en fonction de la variance σ^2 de la variable aléatoire *symétrique* c

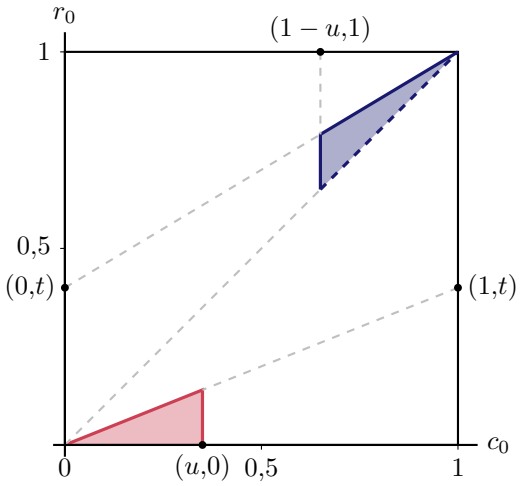

FIGURE 10 – Les régions dans la preuve du théorème 2. Notons qu'elles correspondent aux intersections des figures 7 et 8

Corollaire 3. *L'espérance de la longueur du n-ième intervalle est donnée par*

$$\mathbb{E}[L_n] = \mathbb{E}[\ell_1]^n = (1-2\theta)^n,$$

où θ est défini dans le corollaire 2.

Démonstration. Puisque les variables ℓ_i, $i > 0$, sont mutuellement indépendantes, il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[L_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \ell_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\ell_i] = \mathbb{E}[\ell_1]^n,$$

par le corollaire 1. Le résultat s'ensuit alors du corollaire 2. ■

À la suite du corollaire 2, nous avions observé que la méthode de bissection classique minimise le facteur de contraction moyen parmi les méthodes de bissection stochastiques *symétriques*. Le corollaire 3 permet de traduire cette observation en un énoncé d'optimalité pour la longueur moyenne de l'intervalle après n itérations. En effet, lorsque $r \sim \mathcal{U}(0,1)$ et que la longueur de l'intervalle initial est normalisée à 1, on a $\mathbb{E}[L_n] = \mathbb{E}[\ell_1]^n$. Ainsi, le comportement moyen de l'algorithme est gouverné entièrement par la constante de contraction $C = \mathbb{E}[\ell_1]$. En particulier, l'algorithme 2 est en moyenne linéaire, c'est-à-dire que l'erreur e_n à la n-ième étape satisfait

$$e_{n+1} \approx C^n e_0,$$

Or, une simple analyse de la fonction $f(c) = c(1-c)$ montre que

$$0 \leq c(1-c) \leq \frac{1}{4}$$

pour tout $c \in [0,1]$. Puisque $\mathbb{E}[\ell_1] = 1 - 2\,\mathbb{E}[c(1-c)]$, il s'ensuit alors que

$$\frac{1}{2} \leq \mathbb{E}[\ell_1] \leq 1.$$

L'égalité à droite se produit si et seulement si $c \in \{0,1\}$ presque sûrement, c'est-à-dire lorsque la coupe se fait presque toujours aux extrémités de l'intervalle. À l'inverse, l'égalité à gauche se produit si et seulement si $c = \frac{1}{2}$ presque sûrement, ce qui correspond exactement à la méthode de bissection classique. Ainsi, la constante de contraction moyenne est minimisée *uniquement*, à un ensemble de mesure nulle près, par la bissection classique.

Corollaire 4. *La méthode de bissection classique est optimale en moyenne (au sens de $\mathbb{E}[L_n]$) dans la famille des algorithmes de bissection stochastique.*

4. Simulations numériques

Nous réalisons des expériences numériques afin de valider et d'illustrer les résultats théoriques des sections précédentes. Les valeurs rapportées ci-dessous sont obtenues à partir de la méthode de bissection stochastique originale (algorithme 1), plutôt qu'à partir de la version invariante par changement d'échelle, afin de confirmer que nos résultats demeurent valides dans ce cadre. Le code utilisé pour les simulations de cette section est disponible dans le répertoire GitHub [7].

4.1. Le taux de convergence moyen

Pour mesurer empiriquement le facteur de contraction moyen, nous menons l'expérience suivante :

1. On génère $r \sim \mathcal{U}(0,1)$;
2. On applique l'algorithme 1 avec des points de coupe $c_n \sim \mathcal{D}(0,1)$, pour $f(x) = x - r$, avec une petite tolérance et un grand nombre d'itérations, par exemple 10^{-15} et $N = 30$;
3. On calcule les facteurs $\frac{b_{i+1}-a_{i+1}}{b_i-a_i}$ à chaque itération et on les conserve en mémoire ;
4. On répète les étapes 1 à 3 un grand nombre de fois, par exemple 500 fois ;
5. On calcule un intervalle de confiance à 95 % pour la moyenne à l'aide du bootstrap.

Le principal avantage des intervalles de confiance bootstrap est qu'ils sont non paramétriques : ils peuvent donc être utilisés sans connaissance précise de la distribution sous-jacente, ou seulement sous des hypothèses faibles [3].

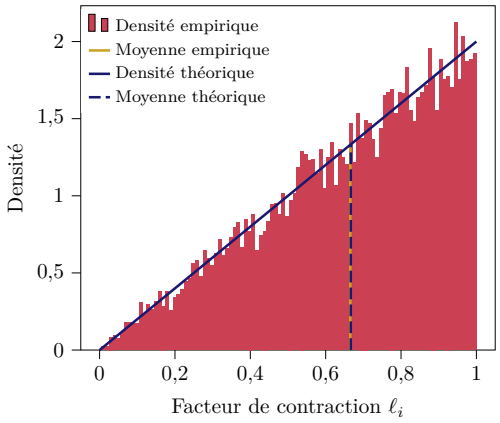

FIGURE 11 – Densités empirique et théorique des ℓ_i pour $\mathcal{U}(0,1)$.

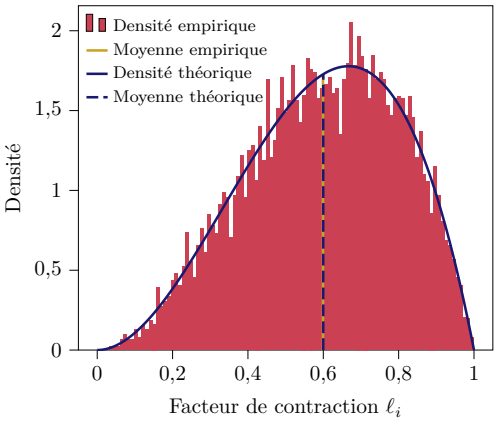

FIGURE 12 – Densités empirique et théorique des ℓ_i pour Beta(2; 2).

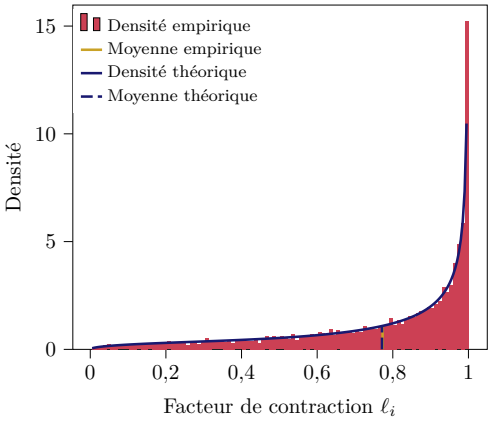

FIGURE 13 – Densités empirique et théorique des ℓ_i pour Beta(0,5; 2).

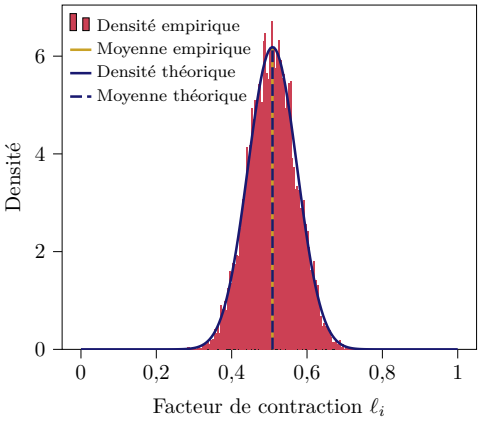

FIGURE 14 – Densités empirique et théorique des ℓ_i pour Bates(20).

Les résultats sont présentés dans le tableau 1, et les distributions empiriques sont illustrées aux figures 11 à 14, en comparaison avec les densités théoriques $h(t) = t(f(t) + f(1-t))$. Pour toutes les distributions testées, la valeur théorique se trouve à l'intérieur des intervalles de

$\mathcal{D}$	$\mathcal{U}(0{,}1)$	Beta(2; 2)	Beta(0,5; 2)	Bates(20)
$\mathbb{E}[\ell_i]$	$[0{,}654; 0{,}677]$	$[0{,}595; 0{,}602]$	$[0{,}767; 0{,}775]$	$[0{,}507; 0{,}509]$
$(\mathbb{E}[L_N])^{\frac{1}{N}}$	$[0{,}655; 0{,}676]$	$[0{,}599; 0{,}612]$	$[0{,}764; 0{,}781]$	$[0{,}508; 0{,}510]$
Théorique	$\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	$\frac{27}{35} = 0{,}77\ldots$	$\frac{61}{120} = 0{,}508\overline{3}$

TABLEAU 1 – Le facteur de contraction moyen pour différentes distributions

r		$\mathcal{U}(0{,}1)$	Beta(2; 2)	Beta(0,5; 2)	Beta(2; 0,5)	Bates(20)
0.1	Moyenne	$[37{,}01; 37{,}75]$	$[31{,}76; 32{,}25]$	$[49{,}42; 50{,}64]$	$[53{,}99; 55{,}35]$	$[27{,}37; 27{,}49]$
	Étendue	$[19{,}56]$	$[17{,}47]$	$[17{,}89]$	$[19{,}88]$	$[25{,}31]$
	$\mathbb{P}[N \leq 27]$	$[0{,}03; 0{,}06]$	$[0{,}12; 0{,}16]$	$[0{,}00; 0{,}01]$	$[0{,}00; 0{,}01]$	$[0{,}53; 0{,}59]$
0.3	Moyenne	$[37{,}97; 38{,}71]$	$[32{,}39; 32{,}91]$	$[51{,}65; 53{,}00]$	$[53{,}68; 54{,}37]$	$[27{,}35; 27{,}49]$
	Étendue	$[22{,}56]$	$[21{,}46]$	$[17{,}95]$	$[23{,}93]$	$[24{,}31]$
	$\mathbb{P}[N \leq 27]$	$[0{,}02; 0{,}04]$	$[0{,}08; 0{,}12]$	$[0{,}00; 0{,}02]$	$[0{,}00; 0{,}01]$	$[0{,}52; 0{,}58]$
0.45	Moyenne	$[37{,}93; 38{,}65]$	$[32{,}19; 32{,}69]$	$[52{,}55; 53{,}84]$	$[53{,}89; 54{,}00]$	$[27{,}41; 27{,}54]$
	Étendue	$[20{,}62]$	$[20{,}47]$	$[21{,}95]$	$[24{,}89]$	$[25{,}31]$
	$\mathbb{P}[N \leq 27]$	$[0{,}03; 0{,}05]$	$[0{,}08; 0{,}11]$	$[0{,}00; 0{,}01]$	$[0{,}00; 0{,}01]$	$[0{,}49; 0{,}55]$

TABLEAU 2 – Statistiques du nombre d'itérations jusqu'à convergence pour différentes racines

confiance, lesquels sont très étroits. Cela fournit un appui statistique aux facteurs d'échelle théoriques obtenus précédemment. De plus, une distribution fortement concentrée autour de 1/2 et de faible variance, comme la distribution Bates(20), présente un taux de convergence très proche de celui de la méthode de bissection classique. La longueur du dernier intervalle est également mesurée pour chaque exécution afin de vérifier qu'elle satisfait elle aussi la conclusion du corollaire 3.

4.2. Performance pour des racines fixées

La seconde expérience de cette section considère des valeurs fixes de la racine. Nous examinons une racine près du bord ($r = 0{,}1$), près du centre ($r = 0{,}45$) et dans une position intermédiaire ($r = 0{,}3$). Pour atteindre une tolérance de 10^{-8}, la méthode de bissection classique nécessite 27 itérations, indépendamment de la racine. Pour chaque valeur de r, nous effectuons 1000 exécutions de l'algorithme stochastique et calculons un intervalle de confiance bootstrap à 95 % pour le nombre moyen d'itérations nécessaires afin d'atteindre la tolérance prescrite (tableau 2). Nous calculons également l'étendue des résultats, c'est-à-dire le nombre minimal et maximal d'itérations nécessaires, ainsi que le nombre d'exécutions faisant au moins aussi bien que la bissection déterministe. Nous appelons ces exécutions des *essais chanceux*. La quantité $\mathbb{P}[N \leq 27]$ est alors estimée par une proportion, avec des intervalles de confiance de Wilson [4].

Les distributions de N pour $r = 0{,}1$ sont illustrées à la figure 15. Sans surprise, Beta(2; 0,5) donne les moins bons résultats, étant initialement biaisée à l'opposé du sous-intervalle contenant la racine. À l'inverse, Beta(0,5; 2) devient problématique lorsque la racine se retrouve près du centre de l'intervalle de travail, les coupes demeurant biaisées vers la gauche et menant à des choix sous-optimaux. Des *essais chanceux* surviennent néanmoins, mais avec une probabilité très faible, inférieure à 1 %. La loi uniforme offre aussi des performances modestes, nécessitant en moyenne environ 10 itérations supplémentaires dans tous les cas, avec une faible probabilité d'*essais chanceux*. La loi Beta(2; 2) requiert environ 5 itérations de plus en moyenne, mais présente une probabilité nettement plus élevée d'*essais chanceux*, pouvant réduire le nombre d'itérations jusqu'à 10. Enfin, Bates(20) produit des *essais chanceux* dans environ 50 % à 60 % des cas ; toutefois, sa faible variance limite ces gains à 2 ou 3 itérations au maximum, et elle nécessite en moyenne tout au plus une itération de plus que la bissection déterministe.

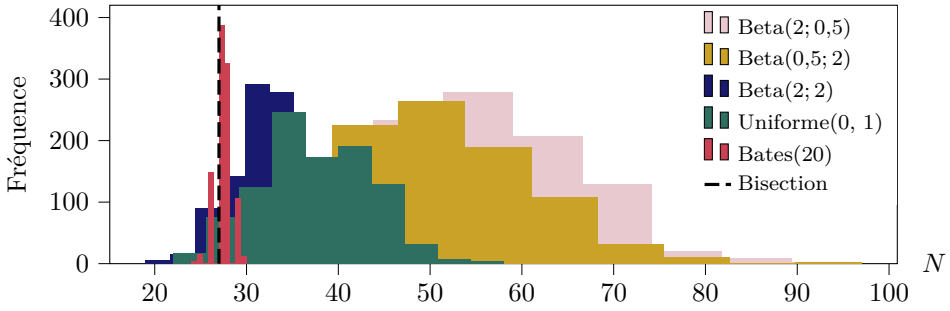

FIGURE 15 – Distribution empirique du nombre N pour $r = 0{,}1$, selon la loi de la coupe c

5. Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié les propriétés de convergence de la méthode de bissection stochastique. Lorsque la position de la racine est supposée uniformément distribuée sur l'intervalle de recherche, nous avons obtenu des taux de convergence moyens explicites, ne dépendant que de la moyenne et de la variance de la distribution du point de coupe. En particulier, nous avons montré que la longueur relative du nouvel intervalle est indépendante de toute information précédente, ce qui nous a permis de calculer l'espérance de la longueur de l'intervalle à l'itération n. En moyenne, la convergence est linéaire, et la longueur moyenne de l'intervalle se comporte comme $C^n L_0$, où $C = 1 - 2\,\mathbb{E}[c(1-c)]$ est le facteur de contraction moyen. En particulier, nous avons pu répondre à la question posée dans le titre de cet article par une réponse simple : *Non, pas en moyenne* !

Les prédictions théoriques ont ensuite été validées numériquement à l'aide de simulations statistiques qui ont fourni des intervalles de confiance appuyant les taux de convergence prédits.

Plusieurs questions demeurent ouvertes.

(1) Nous avons supposé dans cet article que la racine se trouvant dans l'intervalle [0,1] se distribuait en moyenne uniformément sur l'intervalle. Or, la « vraie » distribution est inconnue. Que pouvons-nous dire dans le cas où la racine r suit une distribution arbitraire sur [0,1] ?
(2) Lorsque la distribution du point de coupe est concentrée autour du milieu, les résultats numériques suggèrent que l'algorithme stochastique a une probabilité supérieure à 50 % de converger au moins aussi rapidement que la méthode de bissection classique. Pouvons-nous identifier des distributions de coupe optimales, qui minimisent avec grande probabilité le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une tolérance prescrite ?
(3) Notre analyse a été menée dans le cas particulier où la fonction f, dont on cherche à estimer une racine, possède une racine unique dans l'intervalle $[a,b]$. Il serait alors naturel d'étudier comment la possibilité de racines multiples dans $[a,b]$ pourrait affecter l'analyse.
(4) L'algorithme de K-section, analogue à la méthode de bissection, à la différence près que l'on coupe l'intervalle en K sections à la place de deux sections, semble se prêter naturellement à l'analyse menée dans cet article. Est-il possible d'appliquer les mêmes méthodes pour obtenir un analogue avec $K-1$ coupes ?

Les observations faites dans cet article illustrent comment de simples perturbations aléatoires de procédures numériques classiques peuvent engendrer des mathématiques riches en résultats intéressants, ouvrant même potentiellement de nouvelles pistes pour l'analyse des algorithmes stochastiques et de leurs lois de convergence.

Bibliographie

[1] Bernard Bolzano : Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. 1817. Traduction anglaise par S. Russ dans *Historia Mathematica*, 7(2) :156–185, 1980.

[2] Arnold Buffum Chace et Henry Parker Manning : *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058. Volume I : Free Translation and Commentary.* Mathematical Association of America, Oberlin, 1927.

[3] Bradley Efron et R. J. Tibshirani : *An Introduction to the Bootstrap.* Chapman and Hall/CRC, New York, mai 1994.

[4] Carolina Franco, Roderick J.A. Little, Thomas A. Louis et Eric V. Slud : Comparative study of confidence intervals for proportions in complex sample surveys. *Journal of survey statistics and methodology*, 7(3):334–364, 2019.

[5] Jérôme Gavin et Alain Schärlig : *Longtemps avant l'algèbre, la fausse position, ou comment on a posé le faux pour connaître le vrai, des pharaons aux temps modernes.* EPFL Press, 2012.

[6] Orestis Georgiou, Carl P. Dettmann et Eduardo G. Altmann : Faster than expected escape for a class of fully chaotic maps. *Chaos*, 22(4):043115, 10, 2012.

[7] Philippe-André Luneau, Ludovick Bouthat et Philippe Petitclerc : Randombisection, 2026. DOI : 10.5281/zenodo.20778406.

[8] Gay Robins et Charles Shute : *The Rhind Mathematical Papyrus : An Ancient Egyptian Text*. British Museum Publications, London, 1987. Published for the Trustees of the British Museum.

[9] Arnaldo Rodriguez-Gonzalez : Analyzing topological mixing and chaos on continua with symbolic dynamics, 2023. Preprint (arXiv :2304.02820v2).

[10] Ummu Atiqah Mohd Roslan : Sensitive dependence on initial conditions for an example of Markov map : skewed doubling map. *Matematika (Johor)*, 34(1):13–21, 2018.