Association
mathématique
du Québec

Article

La représentation des matrices bistochastiques en produits de T-transformations

Ludovick Bouthat
Département de mathématiques et statistique,
Université Laval
ludovick.bouthat.1@ulaval.ca

Résumé

En 1984, Marcus, Kidman et Sandy [5] ont étudié la représentation des matrices doublement stochastiques en produit de matrices doublement stochastiques élémentaires, aussi appelées T-transformations. Dans leur article, les auteurs se sont interrogés sur l'existence d'une matrice unistochastique 3×3 qui n'est pas représentable en produit de matrices doublement stochastiques élémentaires. Trois ans plus tard, Poon et Tsing [8] ont donné une réponse positive à cette question. Dans cet article, nous fournissons des détails supplémentaires sur l'ensemble des matrices doublement stochastiques de dimension 3×3 qui peuvent être représentées comme un produit de matrices doublement stochastiques élémentaires.

Mots clés (MSC2020) : 15A23 Factorisation de matrices ; 15B51 Matrices stochastiques ; 91B70 Modèles stochastiques en économie

1 Introduction

Une matrice stochastique est une matrice carrée dont les coefficients sont non-négatifs et dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Ces matrices ont de nombreuses applications en statistiques et dans la théorie des probabilités, d'où le terme « stochastique ». Si une matrice stochastique satisfait la condition supplémentaire que la somme des éléments de chaque colonne est aussi égale à 1, alors celle-ci est dite *doublement stochastique*. Ces matrices font naturellement leur apparition dans une variété de contextes théoriques et appliqués, tels que l'étude de la majorisation [6], ou encore l'économétrie, dont nous ferons une brève présentation dans ce texte.

Dans leur article datant de 1984, Marcus, Kidman et Sandy [5] ont étudié la représentation des matrices doublement stochastiques en produit de matrices doublement stochastiques de la

© Association mathématique du Québec

forme

$$T \;=\; tI + (1-t)P, \tag{1}$$

où I est la matrice identité, P est une transposition, à savoir, dans ce cas-ci, une permutation qui n'échange que deux coordonnées, et t est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$. Ces dernières sont connues sous le nom de *T-transformations*. Ainsi, selon (1) toute transposition est une T-transformation et une T-transformation est une transposition si et seulement si $t = 0$ ou $t = 1$. Nous dirons qu'une matrice doublement stochastique D est *T-décomposable* si elle peut être représentée comme un produit de T-transformations, à savoir s'il existe des T-transformations $T_1, T_2, \ldots, T_m$ telles que $D = T_1 T_2 \cdots T_m$. Dans cet article, nous dénotons l'ensemble des matrices T-décomposables de taille $n \times n$ par $\mathcal{T}_n$.

Les T-transformations sont des objets très intéressants d'un point de vue théorique. Par exemple, l'ensemble des matrices doublement stochastiques $n \times n$ forme un polytope (c'est-à-dire, une généralisation des polygones et polyèdres en dimensions supérieures) dont les arêtes sont précisément les segments $\gamma = PT$, où P est une matrice de permutation quelconque et T est une T-transformation donnée par l'équation (1). Elles présentent également un grand intérêt d'un point de vue pratique. À titre d'exemple, en économétrie, il est primordial d'étudier mathématiquement l'interaction d'une série de transferts de capital entre les individus d'une population qui diminuent globalement l'inégalité salariale au sein de celle-ci. Or, si l'on dénote par $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ le vecteur du capital des individus $1, 2, \ldots, n$ après k transferts, on constate que chacun de ces transferts peut être représenté de façon unique par des T-transformations T_k à l'aide de l'équation $x^{(k+1)} = T_k x^{(k)}$ $(k \geq 0)$.

Dans leur article, Marcus, Kidman et Sandy (1984) ont prouvé deux résultats principaux. Le premier affirme que si D est une matrice doublement stochastique de dimension $n \times n$ $(n \geq 3)$ dont la diagonale est composée uniquement de zéros et dont les $n^2 - n$ entrées restantes sont strictement positives, alors D n'est pas T-décomposable. Le second résultat concerne une famille particulière de matrices doublement stochastiques, dites *unistochastiques* ou *orthostochastiques*. Une matrice S est unistochastique s'il existe une matrice unitaire [1] $U = (u_{ij})$ telle que les coefficients de S satisfont l'égalité $s_{ij} = |u_{ij}|^2$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Dans ce qui suit, nous désignons l'ensemble des matrices unistochastiques de dimension $n \times n$ par $\mathcal{U}_n$. Les auteurs ont ainsi établi que pour tout $n \geq 4$, il existe une matrice unistochastique qui n'est pas T-décomposable. Notons que pour $n = 2$, ce résultat est faux puisque toute matrice doublement stochastique est également une T-transformation. Toutefois, pour $n = 3$, les auteurs ne sont pas parvenus à fournir un résultat analogue et ont ainsi posé la question suivante : existe-t-il une matrice unistochastique 3×3 qui n'est pas T-décomposable ?

1. Une matrice carrée U est dite unitaire si $U^*U = UU^* = I$, où U^* désigne la matrice adjointe de U.

Trois ans se sont écoulés avant que Poon et Tsing [8] apportent une réponse à ce problème en fournissant un exemple d'une matrice unistochastique 3×3 qui n'est pas T-décomposable. Plus encore, ils ont également démontré que $\mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{U}_3$ et que si $n \geq 4$, alors $\mathcal{T}_n \not\subseteq \mathcal{U}_n$ et $\mathcal{U}_n \not\subseteq \mathcal{T}_n$. Ce dernier résultat n'est pas surprenant puisque l'étude des matrices unistochastiques et celle des matrices T-décomposables sont motivées par des questions issues de contextes très éloignés conceptuellement et que leurs constructions respectives n'ont que très peu en commun. Ainsi, il est très étonnant que l'inclusion $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ tienne pour $n = 3$ et c'est l'une des raisons pour lesquelles ce cas a suscité autant d'intérêt chez plusieurs chercheurs dont Au-Yeung, Poon [1] et Nakazato [7]. Ce dernier mathématicien a, entre autres, caractérisé la structure de l'ensemble $\mathcal{U}_3$ des matrices unistochastiques de dimension 3×3 en fournissant la paramétrisation suivante :

$$\mathcal{U}_3 \;=\; \left\{ \lambda J_3 + (1-\lambda) \begin{bmatrix} x & (1-x)t & * \\ (1-x)s & \left(\sqrt{xst} \pm \sqrt{(1-s)(1-t)}\right)^2 & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \;\middle|\; 0 \leq \lambda, x, s, t \leq 1 \right\}, \quad (2)$$

où $J_3 := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice uniforme de dimension 3×3 et où la valeur des entrées marquées d'un $*$ peut être déduite par le fait que les éléments de $\mathcal{U}_3$ sont doublement stochastiques.

Cependant, après plus de 30 ans, nous n'avons toujours pas de bonne description de la structure de $\mathcal{T}_3$. Dans cet article, nous contribuons à la solution de ce problème en caractérisant les matrices T-décomposables de dimension 3×3 qui ont au moins un coefficient nul. Nous fournissons également une condition suffisante pour qu'une matrice doublement stochastique de dimension 3×3 soit T-décomposable dans le cas général et nous donnons une conjecture sur la structure de l'ensemble $\mathcal{T}_3$.

2 Les produits de T-transformations

Nous considérons tout d'abord le cas des matrices doublement stochastiques ayant au moins un coefficient nul. Cette hypothèse nous permet d'obtenir une caractérisation des matrices T-décomposables dans ce cas particulier. Notons que les méthodes utilisées dans la preuve ci-dessous sont inspirées du travail de Marcus, Kidman et Sandy [5].

Théorème 1 *Si $D = (d_{ij})$ est une matrice doublement stochastique de dimension 3×3 ayant au moins un coefficient nul, alors D est T-décomposable si et seulement si elle est de la forme*

$$D \;=\; P \begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & \alpha\beta & \beta(1-\alpha) \\ \beta & \alpha(1-\beta) & (1-\alpha)(1-\beta) \end{bmatrix} Q, \quad (3)$$

où $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *et* P *et* Q *sont des transpositions.*

Pour montrer que l'équation (3) est une condition suffisante pour que la matrice D soit T-décomposable, il suffit d'observer que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1-\beta \\ 0 & 1-\beta & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & \alpha\beta & \beta(1-\alpha) \\ \beta & \alpha(1-\beta) & (1-\alpha)(1-\beta) \end{bmatrix}.$$

Pour démontrer la nécessité de l'équation (3), nous considérons deux cas.

Cas 1 : D **possède deux coefficients nuls dans la même colonne.**

Dans ce cas, il est possible de permuter certaines lignes et colonnes de D (ce qui correspond au fait de considérer la matrice doublement stochastique $D' = P^{tr}DQ^{tr}$, pour certaines matrices de permutations P et Q) afin que la première colonne de D' contienne deux 0 et en particulier que les coefficients dans les positions $(1,1)$ et $(2,1)$ soient nuls. Puisque D est doublement stochastique, la somme des coefficients de la première colonne est 1 et il s'ensuit alors que $d_{31} = 1$. De la même façon, il s'ensuit que $d_{23} = d_{33} = 0$. Ainsi, on trouve directement que D' doit être de la forme

$$D' = \begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pour un certain $\alpha \in [0,1]$. Conséquemment, on obtient que

$$D = PD'Q = P \begin{bmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q$$

et D est donc de la forme (3) avec $\beta = 1$.

Cas 2 : Chaque colonne de D **possède au plus un coefficient nul.** Dans ce cas, supposons que

$$D = T_1T_2 \cdots T_{m-1}T_m$$

est un produit de T-transformations $T_1, T_2, \ldots, T_m$, où m est *minimal*. De plus, supposons sans perte de généralité que $d_{11} = 0$ et $d_{12}, d_{13} > 0$ (si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer la matrice PDQ où P et Q sont des transpositions convenablement choisies). Soit r le plus petit indice tel que la T-transformation T_r n'est pas une matrice de permutation. Observons que nous pouvons trouver une transposition Q telle que

$$Q^{tr}T_rQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} =: T(t).$$

Ainsi, on peut écrire

$$D \;=\; (T_1 \cdots T_{r-1}Q)(Q^{tr}T_rQ)(Q^{tr}T_{r+1}\cdots T_m) \;=:\; RT(t)\Delta,$$

où $R = T_1 \cdots T_{r-1}Q$ est une matrice de permutation et $\Delta = Q^{tr}T_{r+1}\cdots T_m$ est une matrice doublement stochastique. Il s'ensuit que $D' := R^{tr}D$ est une matrice doublement stochastique de dimension 3×3 obtenue à partir d'une permutation des lignes de D et que

$$D' \;=\; T(t)\Delta \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} \Delta. \tag{4}$$

Puisque D' est formée à partir d'une certaine permutation des lignes de D, la première ligne de D est égale à la première, à la deuxième ou à la troisième ligne de D'. Supposons d'abord que la deuxième ligne de D' est égale à la première de D. Il s'ensuit alors que $d'_{21} = 0$ et $d'_{11}, d'_{31} > 0$ (puisque les colonnes de D contiennent au plus un coefficient nul). De plus, l'équation (4) nous assure que

$$0 \;=\; d'_{21} \;=\; t\Delta_{21} + (1-t)\Delta_{31}.$$

Puisque $T(t)$ n'est pas une matrice de permutation, nous avons $0 < t < 1$ et il s'ensuit de la non-négativité des coefficients de Δ que $\Delta_{21} = \Delta_{31} = 0$. Nous savons aussi, toujours d'après l'équation (4), que $\Delta_{11} = d'_{11}$ et par conséquent,

$$d'_{11} \;=\; \Delta_{11} \;=\; \Delta_{11} + \Delta_{21} + \Delta_{31} \;=\; 1.$$

Ainsi, puisque $d'_{31} > 0$, nous obtenons $1 = d'_{11} + d'_{21} + d'_{31} = 1 + 0 + d'_{31} > 1 + 0 + 0 = 1$, une contradiction. Puisque le même raisonnement s'applique si la première ligne de D est égale à la troisième ligne de D', on conclut que la première ligne de D doit être identique à la première ligne de D'. Dans ce cas, il s'ensuit de l'équation (4) que la première ligne de Δ est aussi égale à la première ligne de D et en particulier que $\Delta_{11} = d_{11} = 0$.

Maintenant, deux scénarios se dessinent :

1. $\Delta_{21} = 1$ ou $\Delta_{31} = 1$;
2. $0 < \Delta_{21}, \Delta_{31} < 1$.

Dans le premier cas, nous avons

$$\Delta \;=\; \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1-\beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & \beta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \Delta \;=\; \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1-\beta \\ 0 & 1-\beta & \beta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Dans chacun de ces sous-cas, on vérifie aisément que $D = RT(t)\Delta$ est de la forme donnée par l'équation (3).

Dans le second scénario, à savoir $0 < \Delta_{21}, \Delta_{31} < 1$, on a

$$\Delta \;=\; \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ \gamma & * & * \\ 1-\gamma & * & * \end{bmatrix} \;=\; Q^{tr} T_{r+1} \cdots T_m, \qquad (0 < \gamma < 1),$$

qui est une matrice doublement stochastique T-décomposable avec un coefficient nul dans la position $(1,1)$. Par conséquent, nous pouvons appliquer le même processus à la matrice $\Delta =: \Delta^{(1)}$ que celui que nous avons appliqué à la matrice $D =: \Delta^{(0)}$.

Ce processus se poursuit itérativement un nombre $N \leq m$ de fois et s'arrête lorsque nous multiplions à droite par une matrice S de la forme (5). Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} D \;&=\; \Delta^{(0)} \;=\; RT(t)\Delta^{(1)} \;=\; RT(t)\left(R_2 T(t_2)\Delta^{(2)}\right) \\ &=\; RT(t)R_2T(t_2)\left(R_3T(t_3)\Delta^{(3)}\right) \;=\; \cdots \\ &=\; RT(t)R_2T(t_2)\cdots R_{N-1}T(t_{N-1})S. \end{aligned}$$

Comme précédemment, la première ligne de $\Delta^{(k)}$ doit être égale à celle de $\Delta^{(k-1)} = R_k T(t_k)\Delta^{(k)}$ pour tout indice k. De plus, puisque la première ligne de $T(t_k)\Delta^{(k)}$ est identique à la première ligne de $\Delta^{(k)}$, la permutation R_k doit toujours conserver la première ligne en place. Ainsi, chaque permutation R_k est soit la matrice identité, soit la transposition correspondant à la permutation des coefficients 2 et 3. Dans chaque cas, R_k est précisément égal à $T(1)$ ou à $T(0)$.

De plus, on vérifie aisément que le produit de T-transformations de la forme $T(t)$ est à nouveau une T-transformation de la forme $T(t)$ (plus précisément, $T(t_1)T(t_2) = T(t_1t_2 + (1-t_1)(1-t_2))$). Par conséquent, nous avons

$$D \;=\; R_1T(t_1)R_2T(t_2)\cdots R_{N-1}T(t_{N-1})S \;=\; T(\alpha)S$$

pour un certain paramètre $0 \leq \alpha \leq 1$. Le calcul du produit $T(\alpha)S$ pour les deux possibilités de la forme de la matrice S (données par l'équation (5)) nous permet alors de retrouver la forme (3), complétant ainsi la démonstration.

En 1987, Poon et Tsing [8] ont démontré que $\mathcal{T}_3 \subsetneq \mathcal{U}_3$ en montrant que

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice unistochastique qui n'est pas T-décomposable. Ce faisant, les auteurs ont fourni un exemple d'une matrice appartenant à l'ensemble $\mathcal{U}_3 \setminus \mathcal{T}_3$. Remarquons que les coefficients de la matrice ci-dessus sont tous positifs. Il s'avère que cette propriété n'est pas un hasard, comme l'indique le corollaire suivant.

Corollaire 1 *Si B est une matrice unistochastique qui n'est pas T-décomposable, à savoir $B \in \mathcal{U}_3 \setminus \mathcal{T}_3$, alors les coefficients de B sont strictement positifs.*

Remarquons tout d'abord que puisque B est unistochastique, il existe une matrice unitaire U telle que $b_{ij} = |u_{ij}|^2$ pour tous les indices i et j. Par conséquent, la matrice PBQ est unistochastique pour toutes matrices de permutation P et Q puisque la matrice PUQ est aussi unitaire et $(PBQ)_{ij} = |(PUQ)_{ij}|^2$ pour tous les indices i et j. Ainsi, supposons que B possède au moins un coefficient nul et supposons, sans perte de généralité (grâce à la remarque précédente), que $b_{11} = 0$. La paramétrisation (2) de $\mathcal{U}_3$ donnée par Nakazato nous assure qu'il existe des paramètres $0 \leq \lambda, x, s, t \leq 1$ tels que

$$B \;=\; \lambda J_3 + (1-\lambda)\begin{bmatrix} x & (1-x)t & * \\ (1-x)s & \left(\sqrt{xst} \pm \sqrt{(1-s)(1-t)}\right)^2 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Or, puisque $b_{11} = 0$, il s'ensuit directement que $\lambda = x = 0$ et par conséquent,

$$B \;=\; \begin{bmatrix} 0 & t & * \\ s & (1-s)(1-t) & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & t & 1-t \\ s & (1-s)(1-t) & t(1-s) \\ 1-s & s(1-t) & ts \end{bmatrix}$$

et B est de la forme (3). Ainsi, toute matrice unistochastique ayant au moins un coefficient nul est T-décomposable et la conclusion s'ensuit directement.

Le Théorème 1 caractérise les matrices T-décomposables ayant au moins un coefficient nul. Toutefois, il n'apporte aucune information sur les matrices T-décomposables à coefficients strictement positifs. Afin d'étudier cette famille de matrices, nous avons tout d'abord besoin d'établir un lemme particulier. Celui-ci concerne la T-décomposabilité des matrices doublement stochastiques de la forme $\alpha I_3 + (1-\alpha)J_3$, où J_3 est la matrice uniforme $(1/3)_{1\leq i,j\leq 3}$ et $\alpha \in [0,1]$. Notons que ce résultat est intéressant en soi puisque les matrices de la forme $\alpha I_3 + (1-\alpha)J_3$

sont importantes d'un point de vue théorique. En effet, la norme des matrices de la forme $aI_n + bJ_n$ a récemment été étudiée par plusieurs auteurs [2, 3, 9] motivés par certaines questions sur la géométrie de l'ensemble des matrices doublement stochastiques. Plus encore, un article [10] est même entièrement dédié à la question : *Est-ce que $\alpha I + (1-\alpha)J$ est unistochastique ?* Nous avons déjà vu que les matrices unistochastiques et les matrices T-décomposables semblent être étroitement liées dans le cas $n = 3$. Ainsi, il est naturel de se demander si $\alpha I_3 + (1-\alpha)J_3$ est T-décomposable.

Lemme 1 *Pour tout $\alpha \in [0,1]$, la matrice doublement stochastique $(1-\alpha)I_3 + \alpha J_3$ est T-décomposable.*

Pour la preuve du lemme, introduisons les trois T-transformations de dimension 3×3 suivantes :

$$T_1(t) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix}, \qquad T_2(t) := \begin{bmatrix} t & 1-t & 0 \\ 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$T_3(t) := \begin{bmatrix} t & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-t & 0 & t \end{bmatrix}.$$

Il est alors possible de montrer (avec un calcul trivial bien que fastidieux) que

$$T_1(t_1)T_2(t_2)T_3(t_3)T_2(t_2)T_1(t_1) = (1-\alpha)I_3 + \alpha J_3 \tag{6}$$

si t_1, t_2 et t_3 satisfont les équations

$$2t_1 = 1 + \sqrt{\sqrt{\beta^2 - 6\beta + 1} - \beta}, \qquad 2t_2 = 1 + \beta + \sqrt{\beta^2 - 6\beta + 1},$$
$$2t_3 = 1 - \beta + \sqrt{\beta^2 - 6\beta + 1},$$

où $\beta := \frac{\alpha}{6}$.

Avec ce nouveau lemme, nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème suivant, qui fournit une extension partielle au Théorème 1.

Théorème 2 *Soit B une matrice doublement stochastique de la forme* (3)*. Alors la matrice doublement stochastique $A = \lambda J_3 + (1-\lambda)B$ est T-décomposable pour tout $\lambda \in [0,1]$.*

Puisque la matrice J est un *élément absorbant* de l'ensemble des matrices doublement stochastiques, c'est-à-dire que $DJ = JD = J$ pour toute matrice doublement stochastique, nous avons

$$A = \lambda J + (1-\lambda)B = B((1-\lambda)I + \lambda J).$$

Le Lemme 1 et le Théorème 1 nous assurent ainsi que la matrice $(1-\lambda)I + \lambda J$ et la matrice B sont T-décomposables, respectivement. Il s'ensuit alors directement que la matrice A est également T-décomposable.

3 Conclusion et remarque

À la suite du résultat du Théorème 2, il est naturel de se demander si une réciproque est valide, c'est-à-dire : *est-ce que toute matrice T-décomposable de dimension 3×3 est de la forme $\lambda J_3 + (1-\lambda)B$, où B est de la forme* (3) *?* Bien que nous ne soyons pas en mesure de répondre à cette question, nous présentons tout de même une heuristique afin d'éclaircir la question.

Supposons que A est une matrice T-décomposable aux coefficients strictement positifs. De plus, supposons, sans perte de généralité, que a_{11} est le (ou un) plus petit coefficient de A. Définissons $\alpha := 3a_{11}$ et observons que nous avons $0 < \alpha \leq 1$ (où la borne supérieure est vérifiée puisque $1 = \frac{1}{3}\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \geq 3\min_{i,j} a_{ij} = \alpha$). Nous trouvons alors que

$$B \;:=\; \frac{1}{1-\alpha}(A - \alpha J_3) \;=\; A\Big(\frac{1}{1-\alpha}I_3 - \frac{\alpha}{1-\alpha}J_3\Big)$$

est une matrice doublement stochastique ayant un zéro dans la position $(1,1)$. De plus, même si $\lambda := -\frac{\alpha}{1-\alpha} < 0$, l'équation (6) est toujours valable puisque t_1, t_2 et t_3 sont bien définis lorsque $\lambda < 0$. Remarquons toutefois que dans ce cas, les matrices $T_j(t_j)$, $(1 \leq j \leq 3)$, *ne sont pas* des T-transformations ; elles sont ce que nous pourrions définir comme des *pseudos* T-transformations. Plus précisément, il s'agit de matrices de la forme $tI + (1-t)P$ où $t \notin [0,1]$. En interprétant ces matrices comme des transferts de capital entre deux individus, tel que nous l'avons fait précédemment, il est possible de s'apercevoir que les pseudos T-transformations correspondent toujours à des transferts, à la différence près que les individus peuvent maintenant s'endetter et que les transferts peuvent également augmenter l'inégalité salariale dans la population.

Avec ces outils en main, il est possible d'observer que, puisque A est T-décomposable (disons $A = T_1T_2\cdots T_m$), on trouve

$$B \;=\; A\Big(\frac{1}{1-\alpha}I_3 - \frac{\alpha}{1-\alpha}J_3\Big) \;=\; T_1T_2\cdots T_m\, T_1(t_1)T_2(t_2)T_3(t_3)T_2(t_2)T_1(t_1).$$

Il s'ensuit alors que B est représentable comme un produit de T-transformations et de pseudos T-transformations. Cependant, puisque B est aussi doublement stochastique, son action sur un vecteur de capital x doit toujours diminuer l'inégalité des revenus. Par conséquent, il est naturel d'espérer que B soit également représentable en un produit de T-transformations, à savoir que B soit T-décomposable. Ainsi, puisque $b_{11} = 0$, la matrice B serait de la forme (3) et A pourrait être représentée comme

$$A \;=\; \lambda J_3 + (1-\lambda)B,$$

où B est de la forme (3) et $\lambda \in [0,1]$. Étant donné ces considérations, nous concluons en proposant la conjecture suivante.

$\mathcal{T}_3 = \{\lambda J_3 + (1-\lambda)B : B \text{ est de la forme (3)}\}$.

Références

[1] Yik Hoi Au-Yeung et Yiu Tung Poon. 3×3 orthostochastic matrices and the convexity of generalized numerical ranges. *Linear Algebra Appl.*, 27 :69–79, 1979.

[2] Ludovick Bouthat, Apoorva Khare, Javad Mashreghi et Frédéric Morneau-Guérin. The p-norm of circulant matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 0(0) :1–13, 2021.

[3] Ludovick Bouthat, Javad Mashreghi et Frédéric Morneau-Guérin. On the norm of normal matrices. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 2022. À paraître.

[4] Eugene C. Johnsen. Essentially doubly stochastic matrices. III. Products of elementary matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 1(1) :33–45, 1973.

[5] Marvin Marcus, Kent Kidman et Markus Sandy. Products of elementary doubly stochastic matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 15(3-4) :331–340, 1984.

[6] Albert W. Marshall, Ingram Olkin et Barry C. Arnold *Inequalities : theory of majorization and its applications*, seconde éd. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2011.

[7] Hiroshi Nakazato. Set of 3×3 orthostochastic matrices. *Nihonkai Math. J.*, 7(2) :83–100, 1996.

[8] Yiu Tung Poon et Nam-Kiu Tsing. Inclusion relations between orthostochastic matrices and products of pinching matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 21(3) :253–259, 1987.

[9] K. R. Sahasranand. The p-norm of circulant matrices via fourier analysis. *Concrete Operators*, 9(1) :1–5, 2022.

[10] Nam-Kiu Tsing. Is $\alpha I + (1-\alpha)J$ orthostochastic ? *Current trends in matrix theory (Auburn, Ala., 1986)*, pages 399–403. North-Holland, New York, 1987.