



Mathématiques et civilisation

Points de fuite, suite

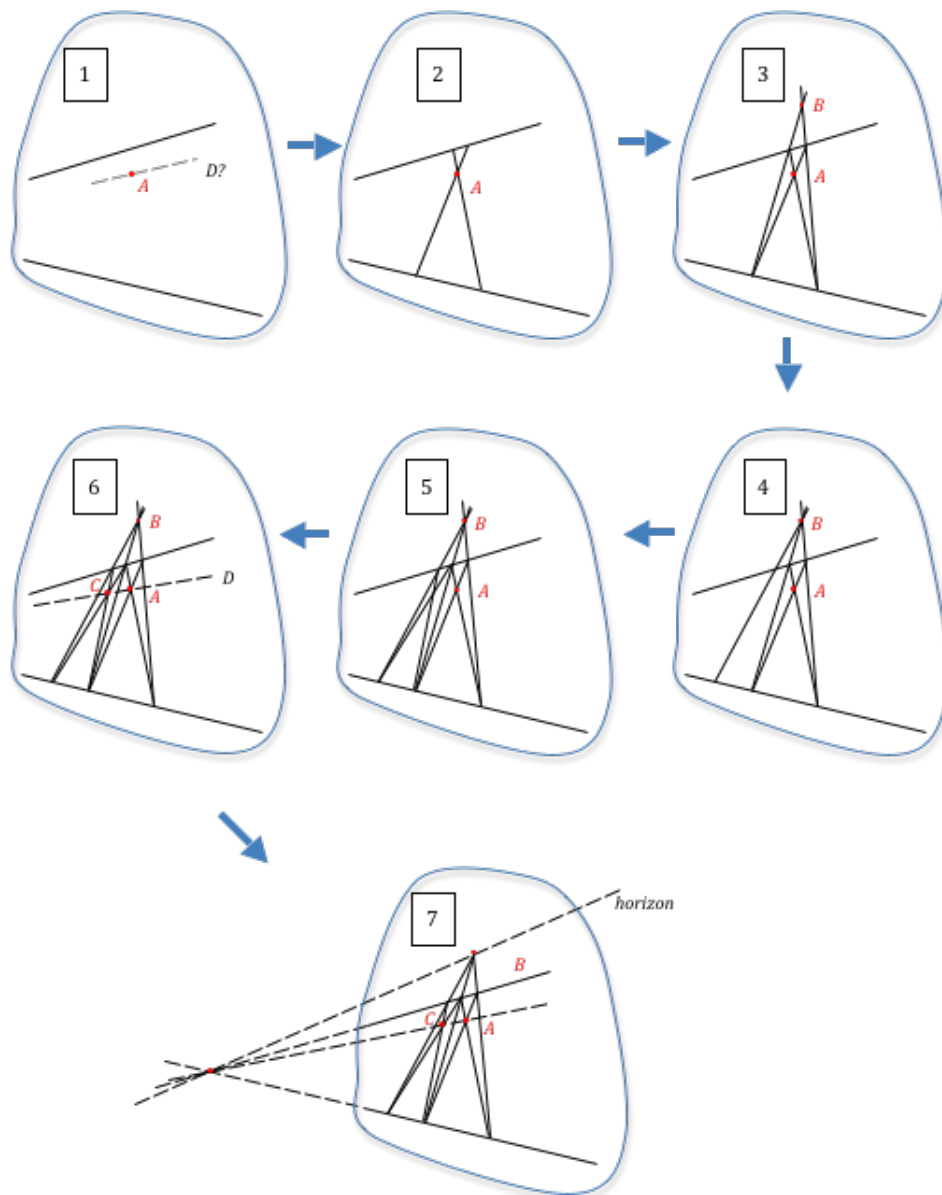
VINCENT PAPILLON,
COLLÈGE JEAN-DE-BRÉBEUF

La ligne manquante

La précédente chronique *Mathématiques et civilisation*, intitulée *Points de fuite*, se terminait par un intrigant problème de géométrie dont nous avons promis de donner la solution : comment tracer la ligne droite (manquante) D qui passe par le point donné A et par le point de rencontre (inaccessible) des deux segments de droite donnés (image 1 de la figure) en n'utilisant que la règle (non graduée) et le crayon (pas d'équerre ni de compas) et en ne sortant pas de la région bornée par le contour donné. Les méthodes de dessin en perspective des artistes de la Renaissance nous invitent à sortir des sentiers battus de la géométrie euclidienne et à apprivoiser le plan projectif dans lequel toutes les droites, y compris les parallèles, se rencontrent. Nous proposons ici deux solutions différentes du problème de la ligne manquante. La première est une application directe de la technique des points de fuite d'Alberti et de Brunelleschi. La seconde, plus savante et plus générale, fait appel au théorème de Pappus.

Une solution façon Alberti ou Brunelleschi

La séquence des sept images de la figure illustre la solution. L'image 1 décrit la situation de départ tandis que l'image 6 donne la solution résultant des constructions successives. La première idée consiste à considérer les deux segments de droite de l'image 1 comme des droites



parallèles, vues en perspectives dans le plan projectif, qui se rencontrent donc en un point de la ligne d'horizon. La deuxième idée (images 2 et 3) consiste à imaginer le point A comme le centre d'un parallélogramme (en perspective) : on trace d'abord arbitrairement les diagonales de ce parallélogramme (image 2), puis on prolonge les côtés opposés ainsi déterminés jusqu'à

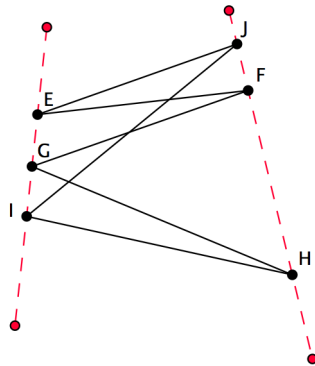
leur point de rencontre B sur la ligne d'horizon (image 3). Ce qui peut sembler déroutant ici, c'est que la ligne d'horizon est construite *a posteriori* et elle n'est pas *horizontale* au sens trivial du mot sur cette page (image 7) ; en géométrie projective on parle de *droite à l'infini* préférablement à *horizon*. La troisième idée consiste à construire un autre parallélogramme en perspective, adjacent au précédent, en traçant un segment de droite issu de B et sécant aux deux segments initiaux (image 4) ; les diagonales de ce nouveau parallélogramme en perspective se coupent en leur point milieu C (image 6), et le segment AC étant parallèle (en perspective) aux segments initiaux, son prolongement à la droite d'horizon arrivera au point de rencontre des deux segments initiaux qui lui sont parallèles. L'image 7 n'est rien d'autre que l'image en perspective d'un dallage (deux dalles parallélogrammes) comme celui que nous avons décrit dans notre chronique précédente. Il est intéressant de faire les constructions 1 à 7 sur un logiciel de géométrie dynamique comme Cabri ou Geogebra pour voir les limites de cette solution en fonction de différentes configurations. Comment faut-il modifier la construction si le point A n'est pas entre les deux segments, mais « au-dessus », par exemple, du segment supérieur sur la feuille de dessin ? Qu'arrive-t-il si les segments initiaux sont vraiment parallèles sur la feuille de dessin et si le point A est à mi-distance des deux segments ? La réponse à la première question est un simple exercice, mais il en va autrement pour la seconde. La solution à l'aide du théorème de Pappus permettra de résoudre tous les cas de figure.

Une solution façon Pappus

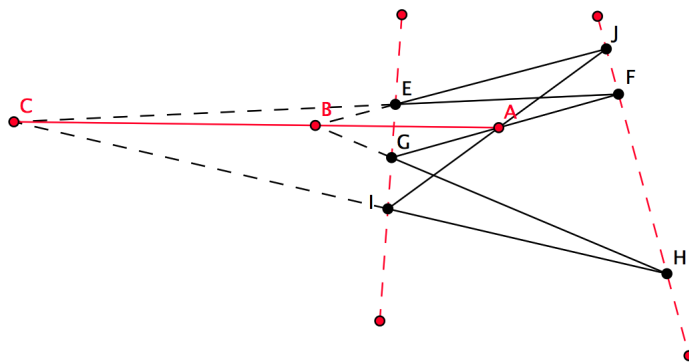
Le théorème de Pappus d'Alexandrie (4^e siècle après JC) est l'un des plus beaux et des plus étonnants de la géométrie. Très épuré, il ne réfère qu'à des relations d'incidence et de colinéarité entre points et droites du plan. En ce sens, c'est un théorème de géométrie projective. Par ailleurs sa démonstration requiert des éléments de géométrie affine, notamment la notion de longueur pour les segments de droite. Dans son magnifique *Introduction to Geometry* (Wiley, 1961), Coxeter considère même le théorème de Pappus comme un axiome de la géométrie projective. On pourrait dire que le théorème de Pappus est un peu au plan projectif ce que le théorème de Pythagore est au plan cartésien. Voici l'énoncé du théorème de Pappus :

Si les six sommets d'un *hexagone* se situent alternativement sur deux droites, alors les trois points d'intersection des côtés opposés de cet hexagone sont colinéaires.

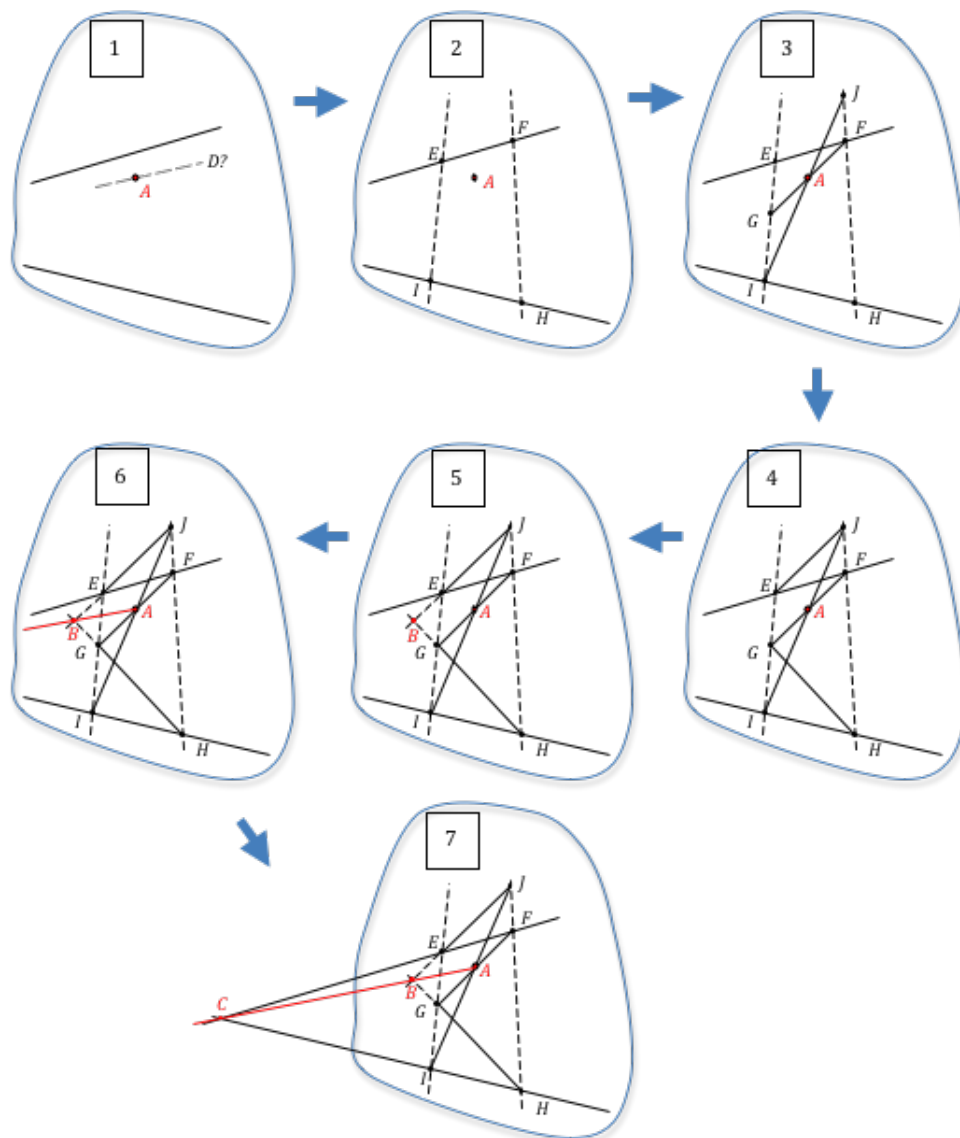
Voici un hexagone (non convexe) dont les sommets E, F, G, H, I, J se situent alternativement sur deux droites :



Deux côtés sont dits opposés sur l'hexagone s'ils sont séparés par deux autres côtés consécutifs. Il y a trois paires de côtés opposés sur la figure : ce sont EF et HI, FG et IJ, JE et GH. La prochaine figure montre les trois points d'intersection A, B et C des paires de côtés opposés et un segment de la droite annoncée par le théorème de Pappus qui les relie. Si vous ne disposez pas d'un logiciel de géométrie dynamique pour faire cette construction, consultez le site <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~decauwer/geo/affine/pappus.html>, où l'interactivité permet d'explorer tous les cas de figure.



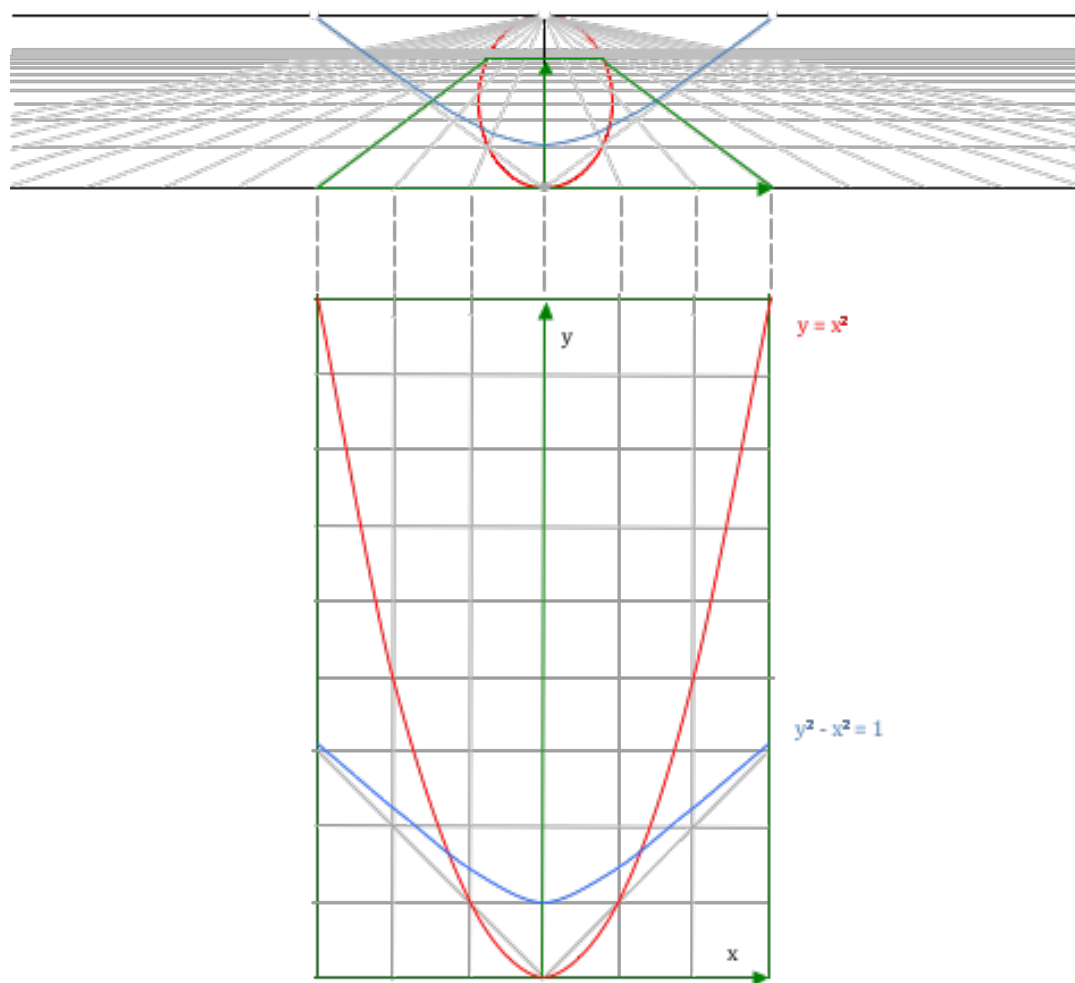
On trouve facilement sur le Web plusieurs démonstrations du théorème de Pappus, par exemple en lien avec le site précité. La solution façon Pappus du problème de la ligne manquante est déjà visible sur la figure précédente. On donne le détail de la solution dans la prochaine séquence d'images (1 à 7).



À l'image 2 on trace (en pointillé) deux sécantes aux segments qui étaient donnés sur l'image 1, et on note E, F, I et H les points d'intersection de ces sécantes avec les segments donnés en 1. Les segments EF et IH seront deux côtés opposés d'un hexagone dont les sommets seront alternativement sur les droites en pointillé. Du point F on trace, en passant par A, le côté FG de l'hexagone, puis du point I on trace, en passant encore par A, le côté IJ de cet hexagone, comme le montre l'image 3. Ces côtés sont opposés et se rencontrent en A. À l'image 4 on

complète l'hexagone en traçant les côtés JE et HG qui se rencontrent ensuite, à l'image 5, au point B. L'image 6 montre la droite passant par A et B qui, selon le théorème de Pappus, doit passer par le point d'intersection des côtés EF et IH de l'hexagone, comme l'illustre l'image 7. Avec un logiciel de géométrie dynamique, on peut voir que cette solution est robuste et résiste à tous les cas de figure.

Coniques et points de fuite



Il y a encore beaucoup à dire sur le thème des points de fuite. Pour l'instant on se contentera d'une remarque savoureuse sur les coniques que l'on devrait faire connaître dans toutes les classes où on enseigne la vision cartésienne des coniques.

Dans son excellent livre *Mathematics and its History* (Springer, 2010) John Stillwell rappelle que Desargues (1639) avait noté qu'on peut distinguer les coniques non dégénérées (ellipses, paraboles et hyperboles) selon le nombre de points qu'elles possèdent sur la droite à l'infini. À première vue (cartésienne), on penserait que la parabole a deux points à l'infini. La figure précédente, inspirée d'une illustration de Stillwell, montre qu'elle en a un seul, alors que l'hyperbole en a deux, grâce à ses asymptotes obliques. On comprend que l'ellipse n'en a pas. Pour bien saisir le sens de cette figure, il faut imaginer qu'on bascule à l'horizontale le plan cartésien pour le voir en perspective selon la méthode d'Alberti ou de Brunelleschi.

Errata

Dans la chronique du numéro de mars 2012, intitulée *Les dômes de Cheverny, ou Cavalieri en Chine*, il s'est glissé une coquille qui n'a certainement pas échappé à l'œil du lecteur attentif. À la 4^e ligne du 2^e paragraphe, page 62, il faut évidemment lire que le volume de la sphère est égal au volume du « cylindre inscrit dans le cube, évidé du cône », et non au « volume du cube évidé du cône ». Heureusement, la figure et le texte par la suite ne souffraient pas de cette coquille. Toutes nos excuses aux lecteurs !