Article

Nombres complexes et isométries de $\mathbb{R}^2$

Mario Maïr Cohen, Éducation aux adultes,
Commission scolaire Marguerite-Bourgeois

Résumé

Dans cet article, nous appliquons les nombres complexes à la géométrie des transformations ponctuelles de $\mathbb{R}^2$. Nous déterminerons les équations du groupe des isométries du plan à partir de l'existence et de la nature de leurs points fixes. Nous montrerons ensuite le rôle important de la réflexion comme génératrice de ces isométries et consoliderons notre développement à l'aide d'exemples.

1 Introduction

Les nombres complexes sont apparus suite aux travaux des mathématiciens italiens, notamment Tartaglia et Cardan (1545), qui cherchaient à exprimer les solutions des équations de degrés 3 et 4 à l'aide de formules rationnelles avec radicaux formées à partir des coefficients. L'appellation de *nombres imaginaires* fut introduite par René Descartes en 1637.

John Wallis, en 1685, a été le premier à représenter les nombres réels sur l'axe des x et les nombres imaginaires sur l'axe des y. Presque un siècle plus tard, Caspar Wessel publiera un autre article de représentation des nombres complexes par des points, mais il sera moins remarqué. Entre-temps, en 1730, Abraham de Moivre introduisait sa fameuse formule :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Peu de temps après, Euler établissait sa propre formule, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

En 1777, Euler introduisit le symbole i pour $\sqrt{-1}$, ce qui simplifia les expressions des calculs.

En 1806, un mathématicien amateur suisse, Jean-Robert Argand, dans son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques*, construisit dans un plan le produit $c = ab$ de deux nombres complexes a et b en imitant la construction géométrique de la multiplication des nombres réels donnée par Descartes dans le livre premier de sa *Géométrie*. Le produit c est défini comme le segment représentant la quatrième proportionnelle de a, 1 et b : a est à 1 ce que c est à b. Il déduisit que la racine carrée de -1 se trouve sur l'axe

© Association mathématique du Québec

vertical. Le plan muni de ce produit et de l'addition vectorielle est connu sous le nom de *plan d'Argand*.

En 1831, Gauss, qui travaillait avec d'autres mathématiciens sur le théorème fondamental de l'algèbre, introduisit la notation $z = a + ib$ pour représenter un nombre complexe et définit son module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et son conjugué $\overline{z} = a - ib$. Il observa que les opérations d'addition et de multiplication des nombres complexes possèdent les mêmes propriétés algébriques que les opérations usuelles sur les nombres réels, ce qui en fait un corps. L'acceptation de la théorie des nombres complexes doit beaucoup aussi à Louis-Augustin Cauchy qui développa la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Cherchant à généraliser à l'espace la multiplication des nombres complexes, William Rowan Hamilton découvrit les quaternions[3] après avoir buté longtemps sur une multiplication des triplets qui possèderait les propriétés voulues, ce qui s'est révélé par la suite impossible. Il définit pour cela trois unités imaginaires i, j, et k vérifiant les relations : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Ces relations sont gravées à Dublin sur une plaque à sa mémoire.

Le corps $\mathbb{H}$ des quaternions obtenu par Hamilton n'est pas commutatif, contrairement aux corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un de ses collègues, Cayley, a étendu les quaternions à un espace à huit dimensions réelles. L'algèbre obtenue n'est ni commutative ni associative. Elle est notée $\mathbb{O}$ et appelée *algèbre des octaves* (ou octonions) de Cayley.

Les éléments de cette nature sont appelés *nombres hypercomplexes*. A. Hurwitz a publié en 1898 une généralisation du fameux théorème de Frobenius sur les algèbres associatives de dimension finie, qui dit que les seules algèbres réelles à division de dimension finie, munies d'une norme multiplicative $|xy| = |x|\,|y|$ et possédant $\mathbb{R}$ dans leur centre, sont $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$. L'intérêt de la généralisation de Hurwitz vient du fait qu'il incorpore l'algèbre $\mathbb{O}$ des octaves de Cayley en remplaçant l'hypothèse d'associativité par l'existence d'une norme multiplicative[4].

Le fait que l'on puisse utiliser les nombres complexes pour faire de la géométrie réelle plane vient du fait que l'on peut identifier le plan vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par l'application $\overrightarrow{U}(x, y) \to z = x + iy$. L'intérêt de cette identification se trouve dans l'utilisation possible de la structure multiplicative de $\mathbb{C}$.

Les auteurs de manuels de géométrie vectorielle ou d'algèbre linéaire proposent souvent un chapitre sur les nombres complexes et leur utilité en géométrie plane. Gilbert Labelle[1], par exemple, étudie les similitudes directes de $\mathbb{R}^2$ qu'il note $F_{m,b}(z) = mz + b$. Il classifie ces similitudes directes suivant l'existence et le nombre de points fixes : aucun point fixe pour la translation, un point fixe pour la rotation. Il prouve que toute similitude directe ayant deux points fixes est l'identité.

Dans son excellent livre *Vecteurs, matrices et nombres complexes*, Vincent Papillon[2] montre le résultat remarquable suivant : Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ représente la matrice d'une transformation $\mathbb{R}$-linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, alors la transformation $\mathbb{R}$-linéaire $T' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $T'(z) = mz + n\overline{z}$, avec $m = \frac{a+d}{2} + i\frac{b-c}{2}, n = \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2}$, a le même effet que T.

Réciproquement, si $T(z) = mz + n\overline{z}$ avec m et n dans $\mathbb{C}$, alors la transformation linéaire T

correspondante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(m+n) & -\mathrm{Im}(m-n) \\ \mathrm{Im}(m+n) & \mathrm{Re}(m-n) \end{pmatrix}.$$

Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, les fonctions complexes $z \rightarrow az + b\overline{z}$ représentent donc les transformations linéaires, et les fonctions $z \rightarrow az + b\overline{z} + c$ représentent les transformations affines de $\mathbb{R}^2$, une transformation affine étant, par définition, la somme d'une transformation linéaire et d'une translation.

Le but de cet article est de représenter une isométrie du plan réel au moyen des nombres complexes, une telle isométrie étant une fonction $I\,(\mathrm{z})$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ préservant la distance : $|I(z_1) - I(z_2)| = |z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Des exemples d'isométries dans le plan sont donnés par les translations de vecteur d'affixe v

$$T\,(z) = z + v,$$

ou les rotations autour de l'origine d'angle θ

$$R\,(\mathrm{z}) = \ e^{i\theta}\mathrm{z},$$

où $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, puisque $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.

Au paragraphe 2, nous établirons les formules de toutes les isométries de $\mathbb{R}^2$. Nous justifierons les caractéristiques géométriques de chaque isométrie et déteminerons le type d'équation qui lui correspond.

Au paragraphe 3, nous allons prouver que toute isométrie est la composition de réflexions.

Nous terminerons en décrivant une méthode pour déterminer la droite de réflexion et le vecteur de translation pour les symétries axiales ou glissées.

2 Équations générales des isométries du plan

Considérons les fonctions : $h_1, h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, h_1(z) = \alpha z + \beta, h_2(z) = \alpha\overline{z} + \beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, et $|\alpha| = 1$. Ces fonctions sont des isométries car :
$|h_1(z_1) - h_1(z_2)| = |\alpha(z_1 - z_2)| = |\alpha|\,.\,|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$ puisque $|\alpha| = 1$.

Nous allons prouver que toute isométrie a pour équation soit $h_1(z)$, soit $h_2(z)$. Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1 *Toute isométrie du plan qui laisse fixes* 0, 1 *et* i *est l'isométrie identité.*

Démonstration Soit f une isométrie laissant fixes 0, 1 et i, soit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(i) = i$. Alors

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z) - f(0)| = |z - 0| = |z| && (2.1) \\ |f(z) - i| &= |f(z) - f(i)| = |z - i| && (2.2) \\ |f(z) - 1| &= |f(z) - f(1)| = |z - 1|\,. && (2.3) \end{aligned}$$

Géométriquement, z et f (z) se trouvent à égales distances des trois points O, A et B d'affixes respectifs $O(0)$, $A(i)$ et $B(1)$. Les points $M(f(z))$ et $N(z)$ qu'ils représentent sont dans l'intersection des trois cercles de rayon MO, MA et MB. Le fait que O, A et B ne soient pas alignés entraîne alors que cette intersection est unique. On en déduit que

$$f\,(\mathrm{z}) = \mathrm{z}.$$

Établissons la preuve algébrique de cette affirmation. En élevant au carré chacune des identités (2.1), (2.2) et (2.3), on obtient :

$$f(z).\overline{f(z)} = z.\overline{z},$$
$$(f(z) - i).((\overline{f(z)} + i) = (z - i).(\overline{z} + i), \text{ et}$$
$$(f(z) - 1).(\overline{f(z)} - 1) = (z - 1).(\overline{z} - 1).$$

Effectuons les produits des parenthèses dans la deuxième et la troisième égalité. On trouve :

$$f(z).\overline{f(z)} - i\overline{f(z)} + if(z) + 1 = z.\overline{z} - i\overline{z} + iz + 1 \text{ et } f(z).\overline{f(z)} - \overline{f(z)} - f(z) + 1 = z.\overline{z} - \overline{z} - z + 1.$$

Comme $f(z).\overline{f(z)} = z.\overline{z}$, on obtient que : $f(z) + \overline{f(z)} = z + \overline{z}$ et $f(z) - \overline{f(z)} = z - \overline{z}$.
Cela signifie que les nombres complexes z et f (z) ont même partie réelle et même partie imaginaire, ce qui prouve que $f(z) = z$. $\square$

Théorème 1 *Toute isométrie du plan est donnée par une des deux équations :* $h(z) = \alpha z + \beta$ *ou* $h(z) = \alpha\overline{z} + \beta$, *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *et* $|\alpha| = 1$.

Démonstration Soit h une isométrie quelconque. Posons $\beta = h(0)$ et $\alpha = h(1) - h(0)$. Notons que $|\alpha| = 1$. Considérons maintenant la fonction définie par $k(z) = \frac{h(z)-h(0)}{h(1)-h(0)}$. On voit que $k(z)$ est une isométrie. En effet,

$$\begin{aligned} |k(z_1) - k(z_2)| &= \left|\frac{h(z_1) - \beta}{\alpha} - \frac{h(z_2) - \beta}{\alpha}\right| \\ &= \left|\frac{h(z_1) - h(z_2)}{\alpha}\right| \\ &= \frac{|h(z_1) - h(z_2)|}{|\alpha|} = |z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

puisque h est une isométrie et $|\alpha| = 1$.
De plus, k laisse fixes 0 et 1 puisque $k(0) = \frac{h(0)-\beta}{\alpha} = \frac{\beta-\beta}{\alpha} = 0$ et $k(1) = \frac{h(1)-h(0)}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.
Trouvons la valeur de $k(i)$. Comme k laisse fixes 0 et 1, nous déduisons que :

$$|k(i) - k(0)| = |k(i)| = |i - 0| = |i| = 1 \text{ et } |k(i) - k(1)| = |k(i) - 1| = |i - 1| = \sqrt{2}.$$

Le point $k(i)$ se trouve sur le cercle unité, centré à l'origine, et sur le cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Donc $k(i) = i$ ou $k(i) = -i$. Dans le cas où $k(i) = i$, le lemme 1 entraîne que $k(z) = z$ et donc que $z = \frac{h(z)-\beta}{\alpha}$, c'est à dire que $h(z) = \alpha z + \beta$.

Dans le cas où $k(i) = -i$, posons $l(z) = \overline{k(z)}$. On montre facilement que $l(z)$ est une isométrie qui laisse fixes 0, 1 et i. D'où par le lemme 1, $l(z) = z$ et $z = \overline{k(z)} = \overline{(\frac{h(z)-\beta}{\alpha})}$ ou $\overline{z} = \frac{h(z)-\beta}{\alpha}$. C'est-à-dire que $h(z) = \alpha\overline{z} + \beta$. Ce qui prouve le théorème. □

Remarque. Il y a donc deux types d'isométries de $\mathbb{C}$. Nous dirons que h est de type I si $h(z) = \alpha z + \beta$, et que h est de type II si $h(z) = \alpha\overline{z} + \beta$, avec $|\alpha| = 1$.

Proposition 1 *L'ensemble des isométries de $\mathbb{C}$ est un groupe pour la composition . L'ensemble des isométries de type I en est un sous-groupe distingué.*

Démonstration On obtient facilement les formules pour la composée de deux isométries et pour l'inverse. Par exemple, si $h(z) = \alpha z + \beta$ et $k(z) = \gamma z + \delta$ avec $|\alpha| = |\gamma| = 1$ sont deux isométries de type I, on a : $kh(z) = k(h(z)) = k(\alpha z + \beta) = \gamma(\alpha z + \beta) + \delta = (\gamma\alpha)z + (\gamma\beta) + \delta$, avec $|\gamma\alpha| = |\gamma|\,|\alpha| = 1.1 = 1$. C'est donc une isométrie de type I.

De la même façon, on montre que la composition de deux isométries de type II donne une isométrie de type I et la composition, dans n'importe quel ordre, de deux isométries de types différents donne une isométrie de type II.

La formule pour l'inverse d'une isométrie h est $h^{-1}(z) = \frac{z-\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}z - \frac{\beta}{\alpha}$ pour le type I, ou $h^{-1}(z) = \frac{\overline{z}-\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \frac{1}{\overline{\alpha}}\overline{z} - \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ pour le type II, avec $\left|\frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{1}{\overline{\alpha}}\right| = 1$.

Pour montrer que l'ensemble des isométries de type I est un sous-goupe distingué, il suffit de prouver que khk^{-1} est de type I, pour toute isométrie h de type I et toute isométrie k de type II.
Si $h(z) = \alpha z + \beta$ et $k(z) = \chi\overline{z} + \delta$, on a

$$\begin{aligned}
khk^{-1}(z) &= k(h(\frac{1}{\overline{\chi}}\overline{z} - \frac{\overline{\delta}}{\overline{\chi}})) \\
&= k(\alpha(\frac{1}{\overline{\chi}}\overline{z} - \frac{\overline{\delta}}{\overline{\chi}}) + \beta) \\
&= k(\frac{\alpha}{\overline{\chi}}\overline{z} - \frac{\alpha\overline{\delta}}{\overline{\chi}} + \beta) \\
&= \chi\overline{((\frac{\alpha}{\overline{\chi}}\overline{z} - \frac{\alpha\overline{\delta}}{\overline{\chi}}) + \beta)} + \delta \\
&= \overline{\alpha\overline{z}} - \overline{\alpha}\delta + \chi\overline{\beta} + \delta \\
&= \overline{\alpha}z + (\chi\overline{\beta} + \delta - \overline{\alpha}\delta)
\end{aligned}$$

et $|\overline{\alpha}| = |\alpha| = 1$. L'isométrie khk^{-1} est donc de type I.

Du point de vue géométrique, les isométries du plan se classent en cinq catégories : l'isométrie identité, les translations, les rotations, les réflexions et les symétries glissées.

Une symétrie glissée est, par définition, la composition d'une réflexion par une translation de vecteur parallèle à la droite de réflexion. □

3 Classification des isométries de $\mathbb{C}$

Dans ce tableau, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ et $\gamma^2 = \alpha$.

Isométries	Équations	Points fixes
Identité	$h(z) = z$	$\mathbb{C}$
Translation	$h(z) = z + \beta,\ \beta \neq 0$	$\varnothing$
Rotation	$h(z) = \alpha z + \beta,\ \lvert\alpha\rvert{=}1$	$z_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$
Réflexion	$h(z) = \alpha\overline{z} + \beta,\ \lvert\alpha\rvert{=}1,\ \frac{\beta^2}{\alpha} \leq 0$	de la forme $\frac{\beta}{2} + \mathbb{R}\gamma$
Symétrie glissée	$h(z) = \alpha\overline{z} + \beta,\ \lvert\alpha\rvert{=}1,\ \neg(\frac{\beta^2}{\alpha}) \leq 0$	$\varnothing$

Soit $h_1(z) = \alpha z + \beta, h_2(z) = \alpha\overline{z} + \beta$. Pour déterminer le type géométrique d'isométrie représenté par ces deux équations, nous devons examiner l'existence et la nature de leurs points fixes. Un point z_0 est dit un *point fixe* d'une isométrie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si $f(z_0) = z_0$.

Par exemple, pour l'identité, tout point du plan est un point fixe et pour la réflexion nous savons que chaque point de la droite de réflexion reste fixe. Une rotation a un seul point fixe qui est le centre de la rotation. La translation de vecteur non nul n'a pas de point fixe, tout comme la symétrie glissée.

Considérons les points fixes de l'équation générale $h(z) = \alpha z + \beta$ où $|\alpha| = 1$. Si $\alpha = 1$, alors $h(z) = z + \beta$ est une translation et ne possède pas de point fixe pour $\beta \neq 0$. Quand $\beta = 0$, elle se réduit à l'isométrie identité et dans ce cas tous les points du plan sont des points fixes.

Si $\alpha \neq 1$, alors $h(z) = \alpha z + \beta$ possède le seul point fixe $z_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$; réécrivons $h(z)$ de façon équivalente : $h(z) = \alpha z + (1 - \alpha)z_0$ ou $h(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$. Nous allons montrer que c'est l'équation d'une rotation autour de z_0. Nous savons que si $\alpha = e^{i\theta}$, alors $r(z){=}\alpha z$ est une rotation d'angle θ autour de l'origine O. Considérons $t_{z_0} r t_{z_0}^{-1}$ avec $t_{z_0} = z + z_0$ la translation de vecteur d'affixe z_0. C'est une isométrie, comme composition d'isométries.
On voit que $h(z) = (t_{z_0} r t_{z_0}^{-1})(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$ et a pour point fixe $t_{z_o}(0) = z_0$. Nous déduisons que $h(z)$ est une rotation autour de z_0, de même angle que la rotation $r(z) = \alpha z$ autour de O.

Ceci prouve les trois premières équations du tableau des isométries.

Pour les deux dernières équations du tableau, nous allons déterminer les points fixes de l'isométrie de type II : $h(z) = \alpha\overline{z} + \beta$, $|\alpha| = 1$ et $\beta \neq 0$, en remarquant qu'une réflexion autour d'une droite D de direction $e^{i\theta}$ (qui fait un angle θ avec l'axe des réels) composée avec une translation T de vecteur $kie^{i\theta}$ orthogonal à cette droite, $k \in \mathbb{R}$, est une réflexion autour de la droite D' parallèle à D et située à mi-chemin entre D et $T(D)$. Si D est de la forme $\mathbb{R}e^{i\theta}$, alors $T(D)$ est de la forme $kie^{i\theta} + \mathbb{R}e^{i\theta}$ et D' est de la forme $\frac{1}{2}kie^{i\theta} + \mathbb{R}e^{i\theta}$.

Proposition 2 *Soit D une droite de direction $e^{i\theta}$ et c un point quelconque de cette droite d'affixe complexe ; alors $T(z)$ est une réflexion autour de D si et seulement si $T(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + tie^{i\theta}$ où t est un réel.*

Démonstration Une condition nécessaire et suffisante pour que $T(z)$ soit une réflexion autour de D est que $T(z) - c = e^{i2\theta}\overline{(z - c)}$, d'où $T(z) = e^{i2\theta}\overline{z} - \overline{c}e^{i2\theta} + c$. Soit $c = se^{i\theta} + rie^{i\theta}$ avec

$s, r \in \mathbb{R}$, la décomposition unique de c par rapport à la base orthogonale $\{e^{i\theta}, ie^{i\theta}\}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} T(z) &= e^{i2\theta}\overline{z} - \overline{(se^{i\theta} + rie^{i\theta})}e^{i2\theta} + se^{i\theta} + rie^{i\theta} \\ &= e^{i2\theta}\overline{z} - (se^{-i\theta} - rie^{-i\theta})e^{i2\theta} + se^{i\theta} + rie^{i\theta}. \end{aligned}$$

On déduit que $T(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + 2rie^{i\theta}$. Si l'on pose $t = 2r$, alors $T(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + tie^{i\theta}$. Ce qui prouve la proposition. On note que r et t ne dépendent pas du choix de c sur D, car pour n'importe quel autre point c_1 de D, $c_1 - c = s_1e^{i\theta}$ et donc $c_1 = (s + s_1)e^{i\theta} + rie^{i\theta}$. □

Corollaire 1 *$h(z) = \alpha\overline{z} + \beta$ est une réflexion si et seulement si $\beta = tie^{i\theta}$ et $\alpha = e^{i2\theta}$, où t est réel. De plus, la droite D fait un angle θ avec l'axe des réels et passe par le point d'affixe $\frac{e^{i\theta}}{2}$.*

Démonstration D'après la remarque du début, la droite de réflexion D fait un angle θ avec l'axe des réels et passe par par le point d'affixe $\frac{tie^{i\theta}}{2}$. Puisque ce point est un point fixe de $h(z)$, car on a $h(\frac{tie^{i\theta}}{2}) = e^{i2\theta}(-\frac{tie^{-i\theta}}{2}) + tie^{i\theta} = \frac{tie^{i\theta}}{2}$, la droite de réflexion est de la forme $\frac{tie^{i\theta}}{2} + \mathbb{R}e^{i\theta}$. La condition $\beta = tie^{i\theta}$ et $\alpha = e^{i2\theta}$ est équivalente à $\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{-t^2e^{i2\theta}}{e^{i2\theta}} = -t^2$, c'est-à-dire $\frac{\beta^2}{\alpha} \leqslant 0$ car t est réel. □

Corollaire 2 *$h(z) = \alpha\overline{z} + \beta$ est une symétrie glissée si et seulement si $\beta = se^{i\theta} + tie^{i\theta}$, avec s un réel non nul, t un réel quelconque et $\alpha = e^{i2\theta}$.*

Démonstration Dans ce cas, $h(z) = (\alpha\overline{z} + tie^{i\theta}) + se^{i\theta}$ est la composée de la réflexion $z \to \alpha\overline{z} + tie^{i\theta}$ autour de la droite de réflexion D de direction $e^{i\theta}$ et passant par $\frac{tie^{i\theta}}{2}$, avec la translation $z \to z + se^{i\theta}$ de vecteur parallèle à D. $h(z)$ est donc par définition une symétrie glissée. □

Ceci complète les preuves pour les équations du tableau d'isométries donné au début de cette section. Les types géométriques des isométries sont donc déterminés par leur ensemble F de points fixes, sauf les translations et les symétries glissées pour lesquells $F = \emptyset$.

4 Isométries et réflexions

Définition 1 *Soit f et g deux isométries. L'isométrie gfg^{-1} est appelée la conjuguée de f par g.*

Théorème 2 *La conjuguée d'une isométrie est une isométrie de même type.*

Démonstration D'abord la conjuguée ghg^{-1} de l'isométrie h par g est une isométrie comme composition d'isométries. Nous pouvons vérifier aussi que h laisse fixe z_0 si et seulement si ghg^{-1} laisse fixe $g(z_0)$. En effet, si $h(z_0) = z_0$, alors $ghg^{-1}(g(z_0)) = gh(z_0) = g(z_0)$. La réciproque est aussi vraie car l'isométrie g est inversible. Les isométries transforment un point en un point et une droite en une autre droite et les conjuguées sont des isométries qui transforment des points fixes en points fixes. Par conséquent, les rotations ont pour conjuguées des rotations et les réflexions ont pour conjuguées des réflexions.

Pour une translation $t(z) = z + c$ et une isométrie $g_1(z) = \alpha z + \beta$ ou $g_2(z) = \alpha\overline{z} + \beta$ avec $|\alpha| = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
g_1 t g_1^{-1}(z) &= g_1(t(\frac{z-\beta}{\alpha})) \\
&= g_1(\frac{z-\beta}{\alpha} + c) \\
&= \alpha(\frac{z-\beta}{\alpha} + c) + \beta \\
&= z - \beta + \alpha c + \beta = z + \alpha c.
\end{aligned}$$

Ou bien,

$$\begin{aligned}
g_2 t g_2^{-1}(z) &= g_2(t(\frac{\overline{z}-\overline{\beta}}{\overline{\alpha}})) \\
&= g_2(\frac{\overline{z}-\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} + c) \\
&= \alpha\overline{(\frac{\overline{z}-\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} + c)} + \beta \\
&= z - \beta + \alpha\overline{c} + \beta \\
&= z + \alpha\overline{c}.
\end{aligned}$$

La conjuguée d'une translation par une isométrie est donc une translation.

Une symétrie glissée n'est pas une translation et n'a pas de point fixe. Sa conjuguée par g est une isométrie qui n'est pas une translation et qui ne possède pas de point fixe. C'est donc une autre symétrie glissée. L'isométrie identité est, quant à elle, égale à sa conjuguée par n'importe quelle isométrie. $\square$

Théorème 3 *Toute isométrie de $\mathbb{R}^2$ est la composition d'au plus deux réflexions, excepté la symétrie glissée qui est exactement la composition de trois réflexions.*

Démonstration Nous prouverons le théorème pour l'identité, la translation, la rotation et la symétrie glissée. L'isométrie identité est le carré de n'importe quelle réflexion de la forme $r(z) = \alpha\overline{z}$. En effet, $r^2(z) = \alpha\overline{(\alpha\overline{z})} = \alpha\overline{\alpha}z = |\alpha|^2 z = z$. Une translation $t_c(z) = z + c$ peut s'écrire comme le produit des réflexions $s_1(z) = (-\frac{c}{\overline{c}})\overline{z}$ et $s_2(z) = (-\frac{c}{\overline{c}})\overline{z} + c$, car

$$\begin{aligned}
s_2 s_1(z) &= s_2(-\frac{c}{\overline{c}}\overline{z}) \\
&= -\frac{c}{\overline{c}}\overline{(-\frac{c}{\overline{c}}\overline{z})} + c \\
&= \frac{|c|^2}{|c|^2} z + c \\
&= z + c.
\end{aligned}$$

Pour la rotation $h(z) = \alpha z$ autour de l'origine O, prenons les réflexions $k(z) = \overline{z}$ et $l(z) = \overline{\alpha z}$. On voit tout de suite que $h(z) = kl(z)$ est la composition de deux réflexions. Pour une rotation arbitraire $f(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$ autour de z_0, on a $f(z) = t_{z_0} h t_{z_0}^{-1}(z)$ avec $t_{z_0} = z + z_0$. $f(z)$ est donc la conjuguée de la rotation $h(z)$ autour de O par la translation t_{z_0}. Comme $h(z) = kl(z)$, alors $f(z) = t_{z_0}(kl)t_{z_0}^{-1}(z) = (t_{z_0} k t_{z_0}^{-1})(t_{z_0} l t_{z_0}^{-1})(z)$. $f(z)$ étant la composition des deux conjuguées de réflexions, est aussi la composition de deux réflexions (théorème 2). Toute rotation est donc la composition de deux réflexions.
Le lecteur vérifiera aisément que pour toutes les réflexions qui ont été définies jusqu'ici, on a la condition $\frac{\beta^2}{\alpha} \leq 0$. La symétrie glissée qui est la composition d'une réflexion et d'une translation est donc la composition de trois réflexions. Ce nombre de réflexions ne peut être réduit à deux, puisque la composition de deux réflexions est donnée par $\alpha_1 \overline{(\alpha_2 \overline{z} + \beta_2)} + \beta_1$ qui est de la forme $\alpha_1 \overline{\alpha_2} z + \alpha_1 \overline{\beta_2} + \beta_1$ et ne peut être l'équation d'une symétrie glissée. □

5 Détermination de la droite de réflexion et du vecteur de translation pour les isométries de type II

Soit $h(z) = \alpha \overline{z}$, $|\alpha| = 1$. Nous savons que cette équation est une réflexion par rapport à la droite $\mathbb{R}\gamma$ où $\gamma^2 = \alpha$. Si $\gamma = e^{i\theta}$, alors $\alpha = e^{i2\theta}$. L'équation d'une réflexion par rapport à la droite $y = mx$ est donc de la forme $h(z) = e^{i2\theta}\overline{z}$, avec $m = \tan(\theta)$.

Si la droite de réflexion ne passe pas par l'origine des coordonnées, soit $p = ik$ l'affixe de l'ordonnée à l'origine. Considérons la conjuguée $k(z)$ de la réflexion $h(z)$ par la translation $t_p = z + ik$. C'est une réflexion de la forme : $k(z) = t_p h t_p^{-1}(z) = e^{i2\theta}\overline{(z - ik)} + ik$ qui a comme points fixes la droite $t_p(\mathbb{R}e^{i\theta}) = \mathbb{R}e^{i\theta} + ik$ d'équation $y = tan(\theta)x + k$. Transformons cette équation générale $k(z)$ en une forme plus simple :

$$\begin{aligned} k(z) = e^{i2\theta}\overline{(z - ik)} + ik &= e^{i2\theta}\overline{z} + ik(e^{i2\theta} + 1) \\ &= e^{i2\theta}\overline{z} + ie^{i\theta}k(e^{i\theta} + e^{-i\theta}). \end{aligned}$$

Comme $k(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ est un réel, n égal à $2kRe(e^{i\theta})$, l'écriture simplifiée de $k(z)$ est donc : $k(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + nie^{i\theta}$, $n \in \mathbb{R}$. On a bien dans ce cas $\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{(nie^{i\theta})^2}{e^{i2\theta}} = -n^2 \leqslant 0$.

Dans le cas contraire, on a $k(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + b$, où $b = c_1 e^{i\theta} + ic_2 e^{i\theta}$ (avec $c_1 \neq 0$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$) est la décomposition unique de b dans la base $\{e^{i\theta}, ie^{i\theta}\}$. Donc $k(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + ic_2 e^{i\theta} + c_1 e^{i\theta}$, ce qui montre que $k(z)$ est la composition de la réflexion $r(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + ic_2 e^{i\theta}$ de droite de réflexion parallèle à $y = \tan(\theta)x$ avec la translation de vecteur $c_1 e^{i\theta}$ parallèle aussi à cette même droite. Nous obtenons ainsi une symétrie glissée.

Conclusion :
Une application complexe de la forme : $h(z) = e^{i2\theta}\overline{z} + b$ est géométriquement une réflexion par rapport à une droite parallèle à $y = \tan(\theta)x$ si $b = nie^{i\theta}$, n $\in \mathbb{R}$, ou une symétrie glissée de droite et de vecteur parallèles à $y = \tan(\theta)x$, si $b \neq nie^{i\theta}$, n $\in \mathbb{R}$.

Exemple de réflexion. $f(z) = -i\overline{z} + 1 + i$. C'est soit une réflexion ou une symétrie glissée. Pour nous prononcer, faisons apparaître $\alpha = e^{i2\theta}$.

$f(z) = -i\overline{z}+1+i = e^{i(-\frac{\pi}{2})}\overline{z}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc $2\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Or $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = i\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ et $f(z) = e^{i(-\frac{\pi}{2})}\overline{z} + i\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$; cette application étant de la forme $e^{i2\theta}\overline{z} + nie^{i\theta}$ par ce que nous avons établi, c'est une réflexion par rapport à la droite $y = \tan(-\frac{\pi}{4})x + k$ ou $y = -x + k$. Comme $f(0) = 1 + i$ et que la droite de réflexion est la médiatrice du segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(1, 1)$, $(1/2, 1/2)$ est donc un point de cette droite, ce qui donne 1 pour valeur de k. La transformation donnée est donc une réflexion de droite $y = -x + 1$.

Exemple de symétrie glissée. $g(z) = \overline{z} + 3 + 2i = \overline{z} + 2i + 3$ ou $g(z) = e^{i0}\overline{z} + 2ie^{i0} + 3$. La transformation est la composition de la réflexion $e^{i0}\overline{z} + 2ie^{i0}$ de droite horizontale y $= k$ (car $\tan(0) = 0$) et de la translation de vecteur horizontal 3. C'est donc une symétrie glissée. En plus, la réflexion $e^{i0}\overline{z} + 2ie^{i0}$ transforme le point d'affixe 0 en point d'affixe $2i$. Comme nous l'avons déjà remarqué, le point milieu $(0, 1)$ étant un point de la droite y $= k$, l'équation de la droite de réflexion est $y = 1$.

Remerciements J'adresse mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé dans la rédaction de cet article. Je suis particulièrement reconnaissant envers le professeur Bernard Courteau qui a révisé le manuscrit et qui m'a fourni des références et commentaires d'une grande érudition. Je remercie également Mme Marie-Jane Haguel, rédactrice en chef du Bulletin, pour son support inconditionnel et son aide dans la mise en forme du document, ainsi que les évaluateurs, pour les améliorations suggérées.

Références

[1] Labelle, G. (2003). *Introduction aux nombres complexes et à leurs applications.* Montréal, Canada : Association mathématique du Québec.

[2] Papillon, V. (1998). *Vecteurs, matrices et nombres complexes.* Montréal, Canada : Éditions Modulo.

[3] Quaternions. (2012, mise à jour le 27 mai 2012). *Quaternions. Wikipédia, l'encyclopédie libre* :http ://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternions.

[4] Hurwitz, A. (1898). Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln (Sur la composition de formes quadratiques d'un nombre arbitraire de variables), *Nachr. Ges. Wiss Göttingen*, 309-316.