Note mathématique

Élément le plus long des groupes de Coxeter

Maxime Bergeron [1], Department of Mathematics and Statistics, McGill University,
Marco Robado [2], département de mathématiques, UQÀM
Maxime Scott [3], département de mathématiques, UQÀM

Note de l'éditeur

Le texte qui suit présente les résultats de recherches de trois étudiants en mathématiques. Il a d'abord été publié en tant qu'article dans le *McGill Undergraduate Mathematics Journal (The Delta-Epsilon), Fourth Issue (Winter 2010), p. 28-33*. Nous le publions en tant que Note avec l'accord de la rédaction de *The Delta-Epsilon*.

Résumé

Nous introduisons les concepts de présentation par générateurs et relations d'un groupe afin d'étudier les propriétés particulières de l'élément le plus long de groupes de Coxeter. Nous sommes particulièrement intéressés par la c-factorisation de tels éléments et le fait qu'ils soient c-triés puisqu'il existe des liens entre ceux-ci et les associaèdres, les algèbres de Lie et les algèbres amassées.

1 Introduction

La notion de groupe, fondamentale en mathématiques, est toujours un domaine de recherche très actif. Toutefois, les groupes abstraits sont parfois difficiles à visualiser. C'est pourquoi nous avons étudié les groupes de réflexions finis qui sont facilement représentés par la notion de symétrie. L'étude des groupes de symétries trouve des applications dans de nombreux domaines, tels la théorie de Lie, la récente théorie des algèbres amassées (*Cluster Algebra*), les associaèdres, de même qu'en cristallographie, un domaine de la chimie.
Nous nous sommes intéréssés plus particulièrement à la théorie des éléments c-triés (*c-sortable* en anglais) qui donne une nouvelle interprétation des associaèdres ; cette notion a été introduite par Nathan Reading dans [2]. La construction des éléments c-triés a été réduite à l'étude d'une certaine écriture du mot le plus long dans un groupe de réflexion finie (voir [1]).

1. adresse de courriel de M. Bergeron et http ://www.math.mcgill.ca/mbergeron
2. robado.marco@courrier.uqam.ca
3. scott.maxime@courrier.uqam.ca

Exemple préliminaire

Pour illustrer les concepts abordés dans cet article, nous allons considérer l'exemple du groupe diédral $\mathcal{D}_4$, le groupe des isométries du plan qui préservent le carré. Rappelons que le groupe $\mathcal{D}_4$ est engendré par la réflexion s_1 par rapport à une diagonale du carré et par la rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$. C'est en fait un groupe de réflexions, car il peut être engendré par $S = \{s_1, s_2\}$ où $s_2 = s_1 \circ r$, la réflexion obtenue en composant r avec s_1. Ces éléments peuvent alors s'écrire comme mot sur l'alphabet S :

$$e, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1, s_2s_1s_2, s_1s_2s_1s_2.$$

Notons que chacun de ces éléments peut s'écrire de plusieurs façons différentes à l'aide de relations telles que $e = r^4 = (s_1s_2)^4$, où e représente l'élément neutre du groupe diédral. Observons aussi que l'élément $w_0 := s_1s_2s_1s_2$ est le plus long mot sur $\mathcal{D}_4$ et qu'il s'écrit d'une seule autre manière : $s_2s_1s_2s_1$. Plus formellement, on peut voir les générateurs s_1 et s_2 comme des éléments d'un alphabet, et les éléments du groupe comme des mots sur cet alphabet. Notre objectif est de pouvoir choisir canoniquement un de ces mots pour chaque élément du groupe. Nous commencerons d'abord par définir les groupes libres ainsi que la théorie de la présentation par générateurs et relations. Nous ferons ensuite un survol de la théorie des groupes de Coxeter finis. Enfin, nous aborderons le coeur de notre problématique en parlant de la c-factorisation des mots de Coxeter, plus particulièrement pour w_0, le mot le plus long du groupe.

2 Groupes libres et présentations de groupes

Étant donné un groupe et un ensemble engendrant ce groupe (comme dans l'exemple de $\mathcal{D}_4$ avec l'ensemble $S = \{s_1, s_2\}$), l'intuition nous pousse à parler des éléments du groupe comme des mots sur l'alphabet des générateurs. Cette partie introduit les concepts de groupes libres et de présentations de groupes par générateurs et relations qui sont en fait une façon de parler des éléments de n'importe quel groupe en tant que mots sur un ensemble de générateurs, donnant ainsi un sens précis à l'intuition précédemment mentionnée.

2.1 Groupes libres

Soit S un ensemble de symboles appelé *ensemble générateur*. Posons l'ensemble S^{-1}, un ensemble disjoint et en bijection avec S, tel que pour tout $s_i \in S$, on associe $s_i^{-1} \in S^{-1}$. L'ensemble des mots sur $S \cup S^{-1}$, noté $\mathcal{M}(S)$ [4], forme alors un monoïde pour la concaténation des mots.
Posons $R \subset \mathcal{M}(S)$ appelé *relation d'adjacence*. L'ensemble R est choisi de telle sorte que deux mots sont dits équivalents par R si on peut passer de l'un à l'autre en enlevant ou en rajoutant des mots de la forme ss^{-1} ou $s^{-1}s$, où s est dans S. Ainsi le monoïde $\mathcal{M}(S)/R$ devient, après l'avoir quotienté par R, le groupe $\mathcal{M}(S)/R$ dont le neutre est la classe d'équivalence du mot vide.

4. Nous noterons $\mathcal{M}(S) := \mathcal{M}(S \cup S^{-1})$ pour ne pas alourdir l'écriture.

Exemple 1 *Soit $S = \{a, b, c\}$ un alphabet, alors $S^{-1} = \left\{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}\right\}$. De plus,*

$$abc,\ abb^{-1}ccba \text{ et } c^{-1}c^{-1}cc$$

sont des exemples d'éléments de $\mathcal{M}(S)$. Posons maintenant $F_S = \mathcal{M}(S)/R$ et notons

$$\pi \colon \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)/R = F_S$$

la projection canonique. Alors abc est un représentant de la classe $\pi(abc)$, $accba$ est un représentant de la classe $\pi(abb^{-1}ccba)$ et le mot vide que nous notons e_{F_S} est un représentant de la classe $\pi(c^{-1}c^{-1}cc)$.

2.2 Présentation par générateurs et relations

Nous voulons maintenant pouvoir parler d'un groupe quelconque comme étant un ensemble de mots sur des générateurs. Pour ce faire, il nous faut rajouter un autre ensemble de relations par lequel nous quotienterons un groupe libre. Nous verrons que n'importe quel groupe est isomorphe au quotient d'un groupe libre. La *présentation* du groupe est alors la paire formée d'un ensemble générateur et de relations entre les générateurs. Nous tentons donc de trouver les relations nécessaires et suffisantes afin de pouvoir entièrement décrire un groupe donné.
Prenons G un groupe quelconque avec S un sous-ensemble générateur de G ; G est alors isomorphe à un quotient du groupe libre F_S. En particulier, il existe un ensemble minimal $R \subseteq F_S$ et un sous-groupe normal $N(R) \lhd F_S$ (l'intersection de tous les sous-groupes normaux dans F_S contenant R) tels que les éléments de $N(R)$ correspondent aux relations entre les éléments du groupe G. On considère alors la projection canonique $f \colon F(s) \to G$ l'unique morphisme de groupe associant à chaque élément de S le générateur de G lui correspondant. Le noyau de cette projection est $N(R)$. De plus, $F(s)/N(R) \simeq G$, tel qu'illustré dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F_S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\
F_S/\ker(f) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemple 2 *De manière plus générale, $\mathcal{D}_m$ dénote le groupe des isométries du plan qui préservent un polygone réguler à m côtés. Ce groupe admet la présentation*

$$\mathcal{D}_m \simeq \langle r, s \mid s^2, r^m, srsr \rangle.$$

Démonstration Nous savons que $\mathcal{D}_m = \langle r, s\rangle$, et donc en prenant $S = \{r, s\}$ on construit F_S l'ensemble des mots dans S, et on obtient le diagramme suivant où f représente la projection des mots de l'alphabet S dans le groupe $\mathcal{D}_m$:

$$\begin{tikzcd} F_S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{D}_m \\ F_S/\ker(f) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Nous savons que dans $\mathcal{D}_m$, $s^2 = r^m = srsr = e$ et donc pour $N(R) := N(s^2, r^m, srsr)$, le sous-groupe normal de F_S engendré par ces éléments, nous avons $N(R) \subseteq \ker(f)$. D'autre part, en utilisant les relations de R, tout élément du groupe peut être écrit comme un produit $s^i r^j$ où $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq m$. En effet, étant donné un élément, la relation $sr = r^{-1}s$ nous permet de le réécrire tel qu'indiqué ci-dessus. On obtient donc la liste de $2m$ éléments :

$$\left(e, r, r^2, \ldots, r^{m-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{m-1}\right)$$

qui sont tous distincts puisque

$$r^j = r^k \iff j = k, \quad r \neq s$$

et

$$sr^j = sr^k \iff r^j = r^k \iff j = k.$$

Il s'ensuit que si $\ker(f)$ contient plus d'éléments, l'un de ceux énumérés ci-dessus qui n'y est pas déjà devrait y être ajouté et on aurait $|\mathcal{D}_m| < 2m$. Ceci étant une contradiction, on a que

$$\ker(f) = N(R)$$

et donc que

$$\mathcal{D}_m \simeq \langle r, s \mid s^2, r^m, srsr \rangle.$$

$\square$

À l'aide de méthodes similaires, on peut obtenir la présentation équivalente du groupe $\mathcal{D}_m$ en tant que groupe de réflexions,

$$\mathcal{D}_m \simeq \langle s_1, s_2 \mid s_2^2, s_1^2, (s_1 s_2)^m \rangle.$$

N.B. 1 *On appelle un mot m une* écriture *de $w \in G$ si $f(m) = w$ (où f représente la projection canonique). Dans le reste du document, pour un élément $w \in W$ engendré par l'ensemble S, lorsque nous parlerons de m une écriture de w, il sera sous-entendu que $m \in F_S$ et que $f(m) = w$ si cela ne porte pas à confusion.*

3 Groupes de Coxeter

Toutes les références, définitions et théorèmes ont été tirés du livre *Reflection Groups and Coxeter Groups* de James Humphreys [3].

Définition 1 *Un* groupe de Coxeter *de rang n est un groupe engendré par un ensemble S de cardinal n dont chaque paire d'éléments*

$$s_i, s_j \in S$$

n'est sujette qu'aux relations de la forme $(s_i s_j)^{m(i,j)}$, où $m(i,i) = 1$, $m(i,j) = m(j,i) \geq 2$.

Autrement dit, tous les générateurs sont des involutions et si $(s_i s_j)^n = e$, alors $(s_j s_i)^n = e$. Ceci n'étant que la définition formelle, nous pouvons constater que la façon naturelle de penser à un groupe de Coxeter est de le considérer comme un groupe engendré par des réflexions agissant sur un espace vectoriel euclidien.

Exemple 3 *Le groupe diédral*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m &\simeq \langle r, s_1 \mid s_1^2, r^m, s_1 r s_1 r \rangle \\ &\simeq \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^m \rangle. \end{aligned}$$

Exemple 4 *Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ a pour présentation,*

$$\langle s_1, \ldots, s_{n-1} \mid s_i^2, (s_i s_j)^2, (s_i s_{i+1})^3, \mid i - j \mid > 1 \rangle.$$

Les groupes de Coxeter finis sont d'un intérêt particulier. En effet, on peut démontrer que les groupes de réflexions finis sont exactement les groupes de Coxeter finis.

3.1 Groupes de réflexions finis

Dans cette section, nous nous plaçons dans un espace vectoriel euclidien V de dimension n. Notre étude portera sur un groupe de réflexions W agissant sur l'espace V. Soit W un groupe fini engendré par un ensemble de réflexions. Chaque réflexion dans W définit un hyperplan de réflexion de dimension $n - 1$. Chacun de ces hyperplans possède un complément orthogonal de dimension 1, disons $\mathbb{R}\alpha$ avec $\|\alpha\| = 1$. Posons

$$\Phi = \bigcup_{s_\alpha \in W} \{\alpha, -\alpha\} \quad (s_\alpha \text{ une réflexion de } W).$$

Nous appelons Φ un *système de racines* pour W. Nous pouvons présumer sans perte de généralité que V est l'espace engendré par Φ. Il peut être démontré que l'ensemble Φ est caractérisé comme l'ensemble respectant les axiomes suivants :

1. $\forall \alpha \in \Phi$, $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$.
2. $\forall \alpha \in \Phi$, $s_\alpha \Phi = \Phi$.

Définissons un *système de racines simples* $\Delta \subseteq \Phi$ comme étant une base de l'espace vectoriel V tel que tout vecteur dans Φ soit une combinaison linéaire des éléments de Δ à coefficients tous de même signe. De plus, nous imposons que l'ensemble $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ engendre le groupe W. Il peut être montré que les systèmes simples existent.
Étant donné un vecteur $v = (x_1, \ldots, x_k) \in V$ dans une certaine base de l'espace V, on dit de lui qu'il est positif si tous les $x_i \geq 0$. Puisque, dans la base Δ, chaque vecteur dans Φ s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients tous positifs ou tous négatifs, nous pouvons définir une partition de $\Phi = \Pi \cup -\Pi$ telle que tous les éléments de Π soient positifs. De plus, si $\alpha \in \Pi$, alors $-\alpha \notin \Pi$. Donc, Π contient exactement la moitié des éléments de Φ, c'est-à-dire un par réflexion. Nous appelons Π un *système de racines positives*. Nous avons donc une bijection entre l'ensemble des réflexions dans W et Π.
Évidement, pour chaque choix de système simple de Φ, il existe un système positif différent. Il est étrange de constater que pour n'importe quelle paire de systèmes positifs $\Pi, \Pi' \subseteq \Phi$, il existe toujours un unique élément $w \in W$ tel que $w\Pi = \Pi'$. On dit donc que l'action de W sur les systèmes de racines positives est simplement transitive. Les systèmes simples héritent évidemment de cette propriété.

Exemple 5 *La figure 1 représente le groupe diédral $\mathcal{D}_4$ des symétries du carré. Les lignes pointillées représentent les hyperplans de réflexion (de simples droites dans $\mathbb{R}^2$).*

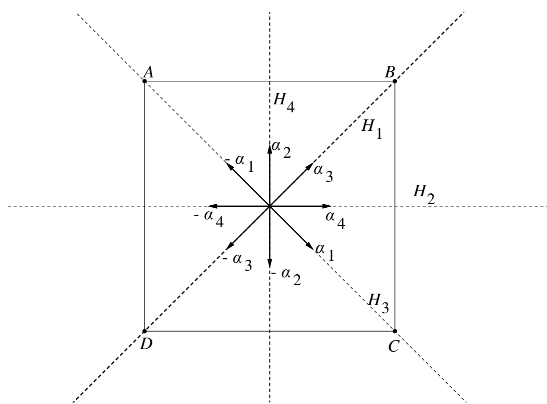

Figure 1 - Groupe diédral $\mathcal{D}_4$

Dans cet exemple, l'ensemble des racines est

$$\Phi = \{\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2, \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_4, -\alpha_4\},$$

les racines α_i et $-\alpha_i$ étant associées à l'hyperplan H_i et à la réflexion s_i. Un ensemble des racines simples serait

$$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

et le système de racines positives lui étant associé est

$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}.$$

Notation 1 *Étant donné un groupe de Coxeter W et Δ le système simple lui étant associé, nous noterons $S := \{s_i \mid \alpha_i \in \Delta\}$ l'ensemble de ces générateurs de telle sorte que $W = \langle S \rangle$.*

Notation 2 *Nous nous permettrons de plus, lorsque cela ne portera pas à confusion, de noter les mots de la forme $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ comme $i_1 \cdots i_k$. Par exemple, le mot $s_1 s_2 s_3 s_4$ pourra aussi s'écrire* 1234*. Rappelons que les s_i sont des involutions ce qui nous évite d'avoir à écrire les s_i^{-1} sous cette notation.*

3.2 L'élément le plus long

Considérant $w \in W$, on définit la longueur de w par rapport à un système simple Δ, $\ell(w)$, comme le plus petit nombre naturel r tel qu'il existe une écriture $w = s_1 \dots s_r$, $s_i \in \Delta$, et on attribue par convention $\ell(e) = 0$. Cette notion nous permet ensuite de définir une écriture de w comme étant réduite si et seulement si elle est de la forme $w = s_1 \dots s_{\ell(w)}$, $s_i \in \Delta$. Il découle directement de cette définition plusieurs propriétés de base telles que $\ell(w) = 1 \iff w = s_i$ ($s_i \in \Delta$), et $\ell(w) = \ell(w^{-1})$.
En cherchant une interprétation géométrique de cette notion, on découvre que la longueur $\ell(w)$ d'un élément w est égale au nombre de vecteurs $\lambda \in \Pi$ tels que $w(\lambda) \in -\Pi$. Cette valeur correspond au nombre de racines positives dont l'image par l'action de w est une racine négative. Si l'on considère une paire de systèmes simples Δ et $-\Delta$ ainsi que Π et $-\Pi$, les systèmes positifs leur correspondant, nous savons qu'il existe un unique élément dans W noté w_0 tel que $w_0\Pi = -\Pi$. De plus, $\ell(w_0) = |\Pi|$, qui est un invariant pour le groupe W, et par la caractérisation géométrique qui vient d'être faite, c'est aussi la longueur maximale pour un élément de W. Nous voyons donc qu'il existe un unique élément de longueur maximale dans un groupe de Coxeter donné. Il existe évidement plusieurs écritures différentes pour cet élément.
Le groupe $\mathcal{D}_4$ est un excellent exemple de la caractérisation géométrique de l'élément le plus long. Rappelons-nous que l'élément le plus long de ce groupe est $s_1 s_2 s_1 s_2$ qui peux aussi s'écrire $s_2 s_1 s_2 s_1$. Ce mot est en effet de longueur 4, ce qui correspond exactement au nombre de racines positives. Nous voyons plus précisément qu'en faisant agir cet élément sur l'ensemble des racines, alors toutes les racines positives sont envoyées sur des racines négatives.
Voici une caractérisation plus facile à manipuler :

Définition 2 *On appelle w_0 l'unique élément de W tel que $\ell(w_0) > \ell(w_0 s_i)$ $\forall$ $s_i \in S$.*

Une propriété particulière de l'élément le plus long qui nous sera d'une grande importance dans ce qui suit est la suivante.

Proposition 1 *Soit W un groupe de Coxeter fini. Alors, l'élément le plus long w_0 a les propriétés suivantes :*

1. *$w_0 = w_0^{-1}$ (w_0 est une involution).*
2. *Tout mot réduit est préfixe d'une écriture réduite de w_0.*

3.3 Sous-groupes paraboliques

L'étude d'un groupe $W = \langle S \rangle = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$ (ainsi que des Φ et Δ fixés qui lui sont associés) étant souvent facilitée par la connaissance de ses sous-groupes, on s'intéresse aux groupes engendrés par des sous-ensembles de ses générateurs. On appelle donc *sous-groupe parabolique* et on note W_I le sous-groupe de W engendré par l'ensemble de générateurs $I \subseteq S$. On note aussi Δ_I l'ensemble de vecteurs α tels que $s_\alpha \in I$. Nous pouvons tout de suite voir les cas limites $W_\emptyset = e$ et $W_S = W$. Ces sous-groupes nous intéressent particulièrement puisque ce sont tous les sous-groupes de W qui sont des groupes de Coxeter.
Bien entendu, pour un Δ fixé, la longueur d'un w dans W_I est la même que sa longueur dans W.

4 c-factorisation

Nous introduisons ici la notion plus abstraite de c-factorisation. Étant donnés un groupe de Coxeter W et son ensemble de générateurs S, afin de mieux caractériser les éléments $w \in W$, nous associons à chacun d'eux une écriture unique.

4.1 Éléments, mots et sous-mots de Coxeter

Définition 3 *Soit W un groupe de Coxeter, on dit que c est un élément de Coxeter du groupe W si c est le produit de tous les générateurs (l'ensemble S) une et une seule fois.*

Il peut bien entendu exister plusieurs éléments de Coxeter pour un même groupe W ainsi que plusieurs écritures pour chaque élément de Coxeter.
La notion d'élément de Coxeter est d'ailleurs en correspondance avec les mots de Coxeter :

Définition 4 *Un mot de Coxeter est une écriture particulière d'un élément de Coxeter. Deux mots de Coxeter différents m et m' peuvent correspondre au même élément de Coxeter par la projection f (définie dans la section 2.2), $f(m) = f(m') = c \in W$.*

Il existe plusieurs mots de Coxeter pour un groupe donné :

Exemple 6 *Les mots de Coxeter $c_1 = 2134$, $c_2 = 2314$ et $c_3 = 2341$ pour le groupe $\mathcal{S}_5$ (le groupe symétrique avec la présentation usuelle) correspondent au même élément de Coxeter. Donc, c_1 est le même élément de Coxeter que c_2 et c_3 bien qu'ils aient des écritures différentes. D'autre part, les mots de Coxeter $c_1 = c_2 = c_3$ et $c_4 = 1234$ correspondent à des éléments de Coxeter différents.*

Exemple 7 *$c = s_1s_2$ et $c = s_2s_1$ sont deux mots de Coxeter différents du groupe $\mathcal{D}_4$.*

Exemple 8 *$c_1 = 2134$ et $c_2 = 2314$ sont deux mots de Coxeter différents du groupe $\mathcal{S}_5$.*

Définition 5 *Soit un alphabet S, et m un mot en S. Un mot m' est un sous-mot de m s'il est obtenu de m en lui retranchant certaines lettres. Cette notion est similaire à celle de sous-suite d'une suite.*

Exemple 9 *Soit* $S = \{a, b, c\}$*,* $m = abc$ *; alors* a*,* b*,* c*,* ac*,* ab *et* abc *sont des sous-mots de* m*.*

La notion de sous-mots est centrale à notre étude des mots de Coxeter. Étant donné c un mot de Coxeter du groupe W et I_j un sous-ensemble des lettres de c, on note c_{I_j} le sous-mot de c obtenu en lui retranchant les lettres qui ne sont pas dans I_j. Autrement dit, on peut considérer c comme une suite de lettres ; alors c_{I_j} est une sous-suite de c, si et seulement si c_{I_j} est un sous-mot de c.

4.2 c-factorisation

Soit c un mot de Coxeter du groupe W et $w \in W$. On dit alors que la c-factorisation de w est le sous-mot réduit m de $c^\infty = cccccccc...$ le plus petit par rapport à l'ordre lexicographique tel que $f(m) = w$ dans W. Ici, l'ordre lexicographique correspond à l'ordre alphabétique sur l'alphabet ordonné S induit par c^∞ . Ce sous-mot réduit m est unique pour une classe de mots de Coxeter équivalents (cette classe correspond à l'élément de Coxeter $f(c) \in W$ de $c \in F(s)$). Soit $w \in W$; on dit que m est une écriture *c-factorisée* de w s'il existe $c_{I_1}, c_{I_2}, ..., c_{I_n}$ sous-mots de c tels que $m = c_{I_1} c_{I_2} ... c_{I_n}$ est une écriture réduite minimale de w par rapport à l'ordre lexicographique de c^∞. (Pour tout $m' = c'_{I_1} c'_{I_2} ... c'_{I_n}$, $m \leq m'$ par rapport à l'ordre lexicographique dans c^∞.)

Définition 6 *Notons la relation « est un sous-mot » par* $\subseteq$*. On dit que* $w = c_{I_1} c_{I_2} ... c_{I_{p-1}} c_{I_p}$ *est c-trié si* $\emptyset \neq c_{I_p} \subseteq c_{I_{p-1}} \subseteq \ldots \subseteq c_{I_1}$ *ou* $w = e$*. On dit que* w *est* toujours c-trié *si* w *est c-trié pour tous les c, mots de Coxeter.*

Exemple 10 *Soit* $c = 1234$ *un mot. Le mot* $w = 1234123121$ *est c-trié avec* $c_{I_1} = 1234$*,* $c_{I_2} = 123$*,* $c_{I_3} = 12$ *et* $c_{I_4} = 1$*. On voit bien que*

$$S \supseteq c_{I_1} \supseteq c_{I_2} \supseteq c_{I_3} \supseteq c_{I_4}.$$

4.3 w_0 toujours c-trié

La particuliarité de w_0, que nous tentons d'éclaircir, est étroitement liée à sa c-factorisation. Le théorème de Nathan Reading qui nous intéresse ici dit que :

Théorème 1 *Étant donné* W *un groupe de Coxeter,* $w_0 \in W$ *est toujours c-trié.*

Bien qu'il existe une preuve de cet énoncé, elle fait appel à des notions fort peu élémentaires qui empêchent de comprendre totalement sa signification. Nous cherchons donc à établir une preuve plus élémentaire qui pourrait permettre de mieux comprendre cette propriété et ses liens avec les algèbres amassées.

5 Résultats

Grâce à des modélisations informatiques des logiciels Chevie [4] et Cambrian [5] du système d'algèbre computationelle GAP [6], permettant de c-factoriser des mots dans plusieurs groupes de Coxeter, nous avons pu obtenir des tables des éléments toujours c-triés de certains groupes et leurs diverses écritures réduites. Nous avons ainsi pu déceler plusieurs phénomènes récurrents dont le fait que les éléments toujours c-triés étaient tous des involutions. En approfondissant nos recherches, afin de mieux comprendre ce phénomène, nous avons mis au point plusieurs conjectures dont certaines restent encore à démontrer. Par contre, nous avons quand même réussi à catégoriser les mots toujours c-triés.

Théorème 2 *Soit W un groupe de Coxeter fini ; étant donné $I \subseteq S$ le sous-ensemble de générateurs présents dans l'écriture de $w \in W$ toujours c-trié, alors w est l'élément le plus long de W_I.*

Démonstration Soit $w \in W$ un élément toujours c-trié et $I \subseteq S$ l'ensemble de générateurs présents dans l'écriture de w. Considérons dans le sous-groupe parabolique W_I un élément de Coxeter c pour lequel il existe une écriture où $s \in I$ est initial. Puisque w est c-trié par hypothèse, $w = sw'$ pour une certain $w' \in W_I$. Ainsi,

$$w^{-1} = w'^{-1}s$$

et

$$w^{-1}s = w'^{-1}s^2 = w'^{-1}$$

et

$$\forall s \in I, \ell(w^{-1}) > \ell(w^{-1}s).$$

Donc, w est l'élément le plus long du groupe W_I. □

Corollaire 1 *Les $w \in W$ toujours c-triés sont des involutions puisque w_0 est une involution.*

Ce théorème, bien que simple, permet de généraliser le résultat de [7, p. 14] comme suit :

Théorème 3 *Soit $I \subseteq S$ le sous-ensemble de générateurs présents dans l'écriture de $w \in W$. Alors w est toujours c-trié si et seulement si w est l'élément le plus long de W_I.*

6 Conclusion et conjectures

Notre étude des éléments toujours c-triés a permis de développer un nouvel outil qui, bien que fort simple, donne une nouvelle perspective sur cette propriété particulière de $w_0 \in W$. Le Théorème 2 qui dit que tout $w \in W$ toujours c-trié est nécessairement l'élément le plus long d'un $W_I \leq W$, nous permet d'envisager une nouvelle preuve que w_0 est toujours c-trié. Il s'agit maintenant de montrer que pour tout ensemble de générateurs S il existe un $w \in \langle S \rangle$ toujours c-trié tel que tout $s \in S$ soit présent dans son écriture, pour conclure que w_0 est toujours c-trié. Une telle approche pourrait offrir une preuve beaucoup plus simple et compréhensible du Théorème 1 et il s'agirait d'une voie prometteuse de recherche à suivre selon les auteurs. En effectuant plusieurs modélisations informatiques des groupes de Coxeter effectuées avec GAP-Chevie-Cambrian [4, 6, 5], nous avons reformulé plusieurs conjectures énoncées auparavant. L'une d'elles particulièrement marquante serait que dans les groupes de Coxeter de rang impair, il existe un élément de Coxeter c et un nombre naturel m tel que $w_0 = c^m$. Il serait très intéressant de vérifier la véracité de cet énoncé et de ses applications. De plus, nous sommes toujours à la recherche d'un algorithme récursif permettant de construire w_0 et sa c-factorisation étant donné un mot de Coxeter fixé.

Remerciements
Nous voudrions remercier le Laboratoire de combinatoire et d'informatique mathématique (LaCIM) [5] de l'UQÀM et plus particulièrement Christophe Hohlweg [6], notre directeur de recherche lors de notre stage de première année.

Références

[1] Hohlweg, C., Lange, C. et Thomas, H. (2011). Permutahedra and generalized associahedra, *Advances in Math.,226*, (no. 1), 608-640.

[2] Reading, N. (2006). Cambrian lattices, *Adv. Math., 205*, (no. 2), 313-353.

[3] Humphreys, J. (1990). *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge, Angleterre : Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[4] Geck, M., Hiss, G., Lübeck, F., Malle, G. et Pfeiffer, G. (1996). *CHEVIE–A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras*. Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput., 7 , 175-210.

[5] Hohlweg, C. *Cambrian* http ://hohlweg.math.uqam.ca/ ?page_id=25.

[6] Schönert, M., et al. (1997). *GAP – Groups, Algorithms, and Programming – version 3 release 4 patchlevel 4*. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany.

[7] Reading, N. (2007) Clusters, Coxeter-sortable Elements and Noncrossing Partitions, *Trans. Amer. Math. Soc. 359* , (no. 12), 5931-5958.

5. http ://lacim.uqam.ca/
6. http ://hohlweg.math.uqam.ca/