Énigmes et jeux mathématiques

Frédéric Gourdeau, Département de mathématiques et de statistique,
Université Laval

Je signe aujourd'hui ma dernière chronique d'énigmes et jeux mathématiques, la première ayant été celle du numéro de mai 2009. J'espère que vous avez pu apprécier quelques-unes de ces chroniques : j'ai certainement eu du plaisir à les rédiger.

Lors du dernier congrès de l'AMQ au Cégep de Ste-Foy, j'ai pu présenter quelques suggestions de ressources pour les gens intéressés par les énigmes mathématiques. Je reprends ici quelques-unes de ces suggestions.

Sam Loyd : le plus grand des créateurs de puzzles américains (selon Martin Gardner), son oeuvre *Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks, and Conundrums (With Answers)* est disponible à http ://www.mathpuzzle.com/loyd/. Personnellement, je recommande plutôt les livres de Martin Gardner portant sur l'oeuvre de Sam Loyd, intitulés *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* et *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd.* Par ailleurs, l'oeuvre de Martin Gardner contient plusieurs perles.

Magie mathématique : le travail de Dominique Souder est à souligner. Il a quelques titres dont *Magic Mathieu compte en moins de 2.*

Je signale aussi deux sites québécois qui valent le détour :
– Association québécoise des jeux mathématiques (aqjm.math.ca), organisateurs au Québec du Championnat international des jeux mathématiques et logiques,
– Récréomath (recreomath.qc.ca), un site très riche qui contient une multitude de références à d'autres sites.

Allons-y maintenant pour les solutions des quatre problèmes proposés en mai dernier.

Solutions des problèmes du numéro de mai 2012

1- Aires de cercles On trace deux cercles de rayon 10 et 12 respectivement, de telle sorte que le centre du cercle de rayon 10 soit sur le cercle de rayon 12. Il y a alors une région commune aux deux cercles. La question : quelle est la différence entre les aires des parties des cercles qui restent une fois qu'on a enlevé la partie commune ?

Solution. La solution est simple car, en fait, l'aire de la partie commune aux deux cercles n'a pas à être déterminée. En effet, si A_{10} et A_{12} dénotent les aires des deux cercles, et si X dénote l'aire de la partie commune, alors on nous demande de calculer

$$(A_{12} - X) - (A_{10} - X) = A_{12} - X - A_{10} + X = A_{12} - A_{10} = \pi(12^2 - 10^2) = 44\pi.$$

2- Un produit intriguant Trouvez toutes les manières d'obtenir 222 222 comme produit de deux nombres à trois chiffres. (L'idée est ici de trouver une solution assez rapide !)

Solution. Lorsque l'on veut factoriser 222 222, on peut tout d'abord remarquer que $222\,222 = 222 \times 1001$. Donc, si 222 222 est le produit de deux nombres à 3 chiffres, alors ceux-ci doivent être compris entre 222 et 1001.

En complétant la factorisation, on obtient

$$222\,222 = 222 \times 1001 = (2 \times 3 \times 37) \times (7 \times 11 \times 13).$$

Si 222 222 est le produit de deux nombres à trois chiffres, l'un de ces deux nombres a 37 comme facteur. Comme $37 \times 6 = 222$ est trop petit, et $37 \times 28 = 1036$ est trop grand, on voit que ce nombre doit être le produit de 37 avec un nombre compris entre 7 et 27. Comme les facteurs premiers possibles sont 2, 3, 7, 11 et 13, on a comme possibilités : 7, 11, 13, $2 \times 7 = 14$, $2 \times 11 = 22$, $2 \times 13 = 26$ et $3 \times 7 = 21$. Il y donc 7 possibilités pour le nombre ayant 37 comme facteur premier, ce qui donne (dans le même ordre que celui de la liste précédente) : 259×858, 407×546, 481×462, 518×429, 814×273, 962×231 et 777×286.

3- Calculatrice inutile Trouvez les deux derniers chiffres de 7^{9999}. Et si vous y arrivez, trouvez les trois derniers chiffres !

Solution. On peut utiliser de manière efficace un chiffrier et remarquer que les trois derniers chiffres de 7^n et ceux de 7^{n+20} sont identiques, et de là conclure que les trois derniers chiffres de 7^{9999} sont les mêmes que ceux de 7^{19}. Mais le titre indiquait que la calculatrice était inutile... alors, un chiffrier, c'est de la triche !

On peut tout d'abord remarquer que les trois derniers chiffres d'un produit sont déterminés par les trois derniers chiffres des facteurs du produit : on se contentera donc de travailler avec les 3 derniers chiffres. En faisant quelques calculs, on voit que $7^4 = 2401$. Comme $9999 = 4 \times 2499 + 3$, alors les 3 derniers chiffres de 7^{9999} sont les trois derniers chiffres de $(7^4)^{2499} \times 7^3$, et donc de

$$401^{2499} \times 7^3 = 401^{2499} \times 343.$$

Quels sont les 3 derniers chiffres de 401^{2499} ? Le développement du binôme nous permet d'écrire $401^{2499} = (1 + 400)^{2499} = 1 + 2499 \times 400 + ...$ où les termes que l'on n'a pas écrits sont tous des nombres se terminant par au moins quatre zéros puisqu'ils ont un facteur 400^k pour $k \geq 2$. Comme $1 + 2499 \times 400$ se termine par 601, il ne reste qu'à faire le produit de 601 par 343, ce qui donne 143 comme trois derniers chiffres.

4- Les chiffres de 4444^{4444} La somme des chiffres dans l'écriture habituelle en base dix de 4444^{4444} est A. La somme des chiffres de A est B. Quelle est la somme des chiffres de B ?

Solution. Soit C la somme des chiffres de B. Essayons tout d'abord de trouver des bornes pour la valeur de C. Rappelons-nous que le logarithme d'un nombre en base dix nous donne environ son nombre de chiffres. En effet, si X est un entier naturel de n chiffres, alors $n-1 \leq \log X < n$. Comme $\log 4444^{4444} = 4444 \log 4444 < 4444 \times 4 = 17776$, alors 4444^{4444} a au plus 17776 chiffres. Ainsi $A \leq 17776 \times 9 = 159984$ (valeur qui serait atteinte si tous les chiffres étaient des 9).

Or la somme des chiffres d'un nombre entre 1 et 159 984 est au plus 41 (ce qui est le cas pour 158 999). Donc B vaut au plus 41, et on voit facilement que C vaut au plus 12 (obtenu si $B = 39$).

On a une partie de faite ! Pour finaliser la résolution de ce problème, je me permettrai d'utiliser la congruence modulo 9. On sait qu'un nombre et la somme des chiffres de ce nombre donnent le même reste lorsque divisés par neuf – un critère de divisibilité classique. En congruence modulo 9, cela se traduit par $4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \mod 9$. Comme 4444 donne un reste de 7 lorsque divisé par 9 (ou encore donne -2 en congruence modulo 9), on obtient $4444^3 \equiv (-2)^3 \equiv -8 \equiv 1 \mod 9$. Puisque $4444 = 3 \times 1481 + 1$, on a alors

$$4444^{4444} \equiv (4444^3)^{1481} \times 4444 \equiv 1 \times 7 \mod 9.$$

Donc $C \equiv 7 \mod 9$. Et comme $C \leq 12$, on a bien $C = 7$. Et vive les modulos !

Note de la rédaction

Merci Frédéric pour toutes ces énigmes et tous ces jeux qui nous ont occupés, mine de rien, dans ces moments creux de la journée passés dans l'autobus ou dans la file d'attente de la cafétéria. Au plaisir de te relire.