Association Mathématique du Québec

La revue des revues

Bernard Courteau,
Université de Sherbrooke

Il est remarquable que depuis l'Année mathématique mondiale 2000, les revues françaises de popularisation scientifique donnent une grande visibilité aux mathématiques. Cet heureux phénomène s'est amplifié depuis que Cédric Villani a obtenu la médaille Field en 2010. Ce jeune mathématicien français d'exception, professeur à l'Université de Lyon et directeur de l'Institut Henri-Poincaré, est devenu soudainement une vedette médiatique. Il consacre une partie importante de son temps à représenter la communauté mathématique auprès du grand public dans des expositions, comme par exemple *Mathématiques, un dépaysement soudain* à la Fondation Cartier pour l'art contemporain qui s'est terminée le 18 mars dernier, ou encore dans des symposiums ou des manifestations populaires organisés pour célébrer des génies mathématiques comme Évariste Galois par exemple, dont on soulignait le bicentenaire de la naissance à l'automne 2011. À la fin de 2011, on l'a même invité à une série d'émissions de France Info appelées *La formule Villani*. J'imagine qu'en 2012 la communauté mathématique française soulignera de belle façon le centenaire de la mort de Henri Poincaré qui a eu une influence si importante sur les mathématiques du XX$^{\text{e}}$ siècle.

Dans cette mouvance, les revues La Recherche, Pour la Science, Sciences et avenir, entre autres, emboîtent le pas et offrent au grand public intéressé par la science des dossiers spéciaux consacrés aux mathématiques que j'aimerais présenter ici : *Les grands problèmes mathématiques : Ils orientent l'avenir des maths*, un Dossier de Pour la Science ; *La révolution des mathématiques*, un Dossier de La Recherche ; *Le pouvoir infini des mathématiques*, un Hors-série de Sciences et avenir. Je présente aussi le dernier numéro de Petit x et un article *L'héritage de Galois* dans le numéro d'octobre 2011 de Pour la Science.

1 Les grands problèmes mathématiques. Ils orientent l'avenir des maths. Dossier de Pour la Science, Janvier-Mars 2012

Ce dossier est essentiellement consacré aux sept problèmes du millénaire choisis par l'Institut Clay de mathématiques, dont chacun est mis à prix pour un million de dollars, et à certains problèmes de Hilbert. Dans l'avant-propos, Cédric Villani parle de l'importance de ces problèmes qui défient les mathématiciens : les 23 énoncés par Hilbert en 1900 qui ont guidé les mathématiques du XX$^{\text{e}}$ siècle, les 7 de l'Institut Clay énoncés en mai 2000 et d'autres dont on ne connaît pas encore l'importance.

Il ajoute :

> Et si la liste de l'Institut Clay est plus courte que celle de Hilbert, ce n'est pas parce qu'il restait moins de problèmes à résoudre, mais parce qu'avec un million de dollars en jeu, on se devait d'être plus prudent sur la sélection !

Et plus loin :

> Résoudre un problème peut prendre un temps considérable. Mais même pendant qu'elles résistent, les énigmes mathématiques jouent souvent un rôle fondamental, en inspirant des théories nouvelles. Ainsi le grand théorème de Fermat a motivé l'exploration de branches entières de la théorie des nombres et la conjecture de Poincaré a accompagné l'histoire de toute la topologie au XX^{e} siècle, donnant lieu à trois médailles Fields.

Le dossier présente ensuite les sept problèmes d'une façon agréable et accessible aux lecteurs possédant une certaine culture mathématique, pour ne pas dire une culture mathématique certaine.

Peter Meier et Jörn Steuding présentent l'**Hypothèse de Riemann**, à savoir que les seuls zéros non triviaux de la fonction zèta de Riemann sont sur la droite $Re(s) = 1/2$.

Après une présentation des contributions de Euler et de Riemann, les auteurs présentent certains résultats récents. Par exemple en 1975, Serguei Voronin démontre que la fonction zèta peut approcher aussi précisément que l'on veut n'importe quelle fonction suffisamment régulière sur un petit domaine. La fonction zèta est un peu comme un atlas contenant toutes les cartes possibles ! Enfin, plus de 100 milliards de zéros de la fonction zèta ont été calculés et corroborent l'hypothèse de Riemann, mais cela évidemment ne suffit pas.

Dans « Les problèmes NP sont-ils si compliqués ? » , Jean-Paul Delahaye présente la conjecture **P** = **NP** ? Il en donne quelques formulations frappantes :

> La question « P = NP ? » signifie à peu près : « Ce que nous pouvons trouver rapidement lorsque nous avons de la chance, peut-il être trouvé aussi vite par un calcul intelligent ? » ... « L'intelligence peut-elle remplacer la chance ? » ... « Tout ce que l'on peut vérifier facilement peut-il être découvert aisément ? »

Delahaye mentionne une lettre de 1956, retrouvée récemment, de Gödel à Von Neumann dans laquelle Gödel introduit l'équivalent du problème P = NP ? Gödel dit que si P = NP, cela facilitera beaucoup la vie des mathématiciens. Delahaye décrit l'idée de Gödel comme suit :

> ... pour résoudre une question ouverte Q, on recherchera parmi toutes les démonstrations de longueur n, pour un nombre entier n fixé, dans un système donné d'écriture des démonstrations, s'il y en a une qui conduit à la réponse. S'il y en a une, on la trouvera vite, car nous sommes dans l'hypothèse où il y a un algorithme rapide, et on aura résolu le problème Q ; si l'on n'en trouve pas et que le n essayé est assez grand, alors « il n'y aura plus de raison sérieuse de rester préoccupé par le problème » écrit Gödel.

Delahaye dit que la conjecture P = NP est peut-être l'énigme la plus importante des mathématiques contemporaines et que l'analyse logique a déjà indiqué que des classes importantes de méthodes ne peuvent aboutir et qu'on ne doit pas perdre son temps à les essayer. Ces résultats négatifs montrent la puissance de la logique mathématique et sa capacité à guider une recherche par des analyses abstraites de méta-niveau. Selon lui, la solution de P = NP ? va nécessiter des idées entièrement nouvelles et cela peut prendre plusieurs décennies.

Dans son article *Turbulence sur les équations des fluides*, Thomas Sonar présente de façon accessible les **équations de Navier-Stokes** qui ont complété les équations d'Euler pour la modélisation de l'écoulement d'un fluide en prenant en compte la viscosité. L'auteur donne quelques notes historiques sur les travaux de l'ingénieur Claude-Louis Navier en 1822, de Adhémar Barré de Saint-Venant en 1834 et de Georges Gabriel Stokes en 1845, et s'étonne que le nom de Barré de Saint-Venant n'ait pas été attaché à ces équations. Il pose la question de l'adéquation du modèle à la réalité et en particulier celle de l'existence de solutions non-physiques (comme des explosions d'un fluide initialement tranquille, par exemple). De telles solutions existent pour les équations d'Euler, ce qui indique que ces équations ne sont pas une bonne description de la réalité. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on ne sait pas. L'auteur termine en disant :

> Soit on démontre que, sous des hypothèses réalistes, une solution régulière des équations de Navier-Stokes existe pour tous les temps, soit, au contraire, que des singularités apparaissent en général. Dans tous les cas, le résultat représentera un progrès considérable dans l'étude de ces équations aux dérivées partielles.

Dans son article *Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman*, Étienne Ghys présente la **conjecture de Poincaré** posée en 1904 dans le dernier de six mémoires (totalisant plus de 300 pages) qui ont créé ce qu'on appelle aujourd'hui la Topologie algébrique : « toute variété compacte de dimension 3 simplement connexe est homéomorphe à la sphère. » Après un siècle de recherche, cette conjecture a été démontrée en 2003 par Grigori Perelman, ce qui lui valut la médaille Field en 2006, médaille qu'il refusa. Il refusa également le prix d'un million de dollars offert par l'Institut Clay !

Étienne Ghys se propose de faire un tour historique sur la représentation de l'espace. Il commence par Gauss qui utilise les nombres complexes et trouve deux nouvelles géométries, la sphérique et l'hyperbolique qui, avec la géométrie euclidienne plane, peuvent servir à représenter de façon localement uniforme toute variété de dimension 2. C'est le théorème d'uniformisation de Koebe-Poincaré démontré en 1907.

> Tout le XIX^{e} siècle aura été nécessaire pour comprendre les surfaces, c'est-à-dire les objets de dimension 2 ; tout le XX^{e} le sera pour faire de même avec les objets de dimension 3 !

C'est William Thurston qui, dans les années 1970-1980, s'intéresse à la représentation locale des variétés de dimension 3, leur « géométrisation ». En plus de la géométrie euclidienne et des géométries sphérique et hyperbolique de dimension 3, il trouve cinq autres géométries appelées géométries de Thurston. En 1976, il formule sa conjecture géométrique : les variétés topologiques (compactes, asphériques et atoroïdales) de dimension 3 peuvent être géométrisées par l'une de ces huit géométries.

Il utilise la chirurgie pour démontrer sa conjecture dans de nombreux cas significatifs, ce qui lui vaut la médaille Fields en 1983. Mais la conjecture de Poincaré résistait toujours. En 2003, Perelman poursuit et mène à son terme le programme de Richard Hamilton lancé en 1982 : utiliser le flot de Ricci comme une espèce de « chauffage » pendant lequel une métrique donnée sur la variété atteint par diffusion une espèce de position d'équilibre thermique qui, on l'espère, sera une des huit métriques de Thurston. Il y a cependant des points singuliers où la courbure devient infinie. Perelman étudie ces singularités et montre comment s'en débarrasser à l'aide de chirurgies. Il démontre alors la conjecture de géométrisation de Thurston et par là même le cas particulier que constitue la conjecture de Poincaré. Guys conclut en disant :

> Pour résoudre un problème, il est parfois utile de chercher la solution d'un autre plus difficile encore.

Cette partie sur les problèmes de l'Institut Clay se poursuit par des articles sur la conjecture de Hodge, sur la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer sur les courbes elliptiques, et par un entretien avec Jean-Pierre Bourguignon sur les équations de Yang-Mills.

Une seconde partie sur les problèmes de Hilbert contient les articles : *Qu'est-ce qu'un bon problème ?*, par Étienne Guys ; *L'incomplétude, le hasard et la physique*, par Jean-Paul Delahaye ; *Aux origines de la calculabilité*, par Pierre Lescanne ; *L'histoire mouvementée des cycles limites*, par Étienne Guys et, en images, *Les groupes de Lie, au cœur des symétries physiques*.

Une troisième partie « La marche vers les solutions » contient les articles suivants : *Le programme de Langlands*, par Robert Langlands ; *J'aimerais tant prouver Syracuse*, par Jean-Paul Delahaye ; *Les équations de l'irréversibilité*, par Clément Mouhot ; *Les résolutions célèbres* par C. Villani, N. Verdier, P. Rozière, A. Mézard et G. Brisson. Je signale que l'article de Langlands réfère à deux articles qu'il a écrits dans les Annales des sciences mathématiques du Québec.

Ce dossier de Pour la science est très riche de contenu, écrit par des mathématiciens de haut vol qui savent mettre en évidence les idées de leur science. Il vaut la peine de l'avoir dans sa bibliothèque.

2 Les dossiers de La Recherche, No 46, Décembre 2011

Ce numéro thématique est intitulé *La révolution des mathématiques, comment l'ordinateur démontre les théorèmes, les défis du XXI^e siècle*. Comme on le dit dans l'éditorial,

> Alors que nous célébrerons en 2012 le centenaire de la naissance d'Alan Turing, l'un des principaux concepteurs de ce qui allait devenir l'ordinateur, ce numéro fait le point sur la profonde transformation des mathématiques provoquée par ses échanges avec l'informatique.

Le numéro est divisé en trois parties : Fondamentaux, Savoirs, Références. Il se termine par un cahier technologique sur la voiture électrique.

Dans son entrevue avec La Recherche, l'expert Gérard Berry, informaticien, directeur de recherche à l'Inria de Sophia-Antipolis, professeur au Collège de France et membre de l'Académie des sciences, répond aux questions sur les liens entre l'informatique et les mathématiques. Il dit qu'on peut presque parler de *symbiose* et que

> L'univers numérique joue actuellement pour les mathématiques le même rôle de catalyseur qu'a joué la physique au XXe siècle.

Il donne plusieurs exemples de ces liens intimes entre les mathématiques et l'informatique : algorithmique, algorithmes probabilistes, preuves assistées par ordinateur, fractales, ondelettes, cryptographie, logique, indécidabilité, analyse non-standard, etc., sujets qui sont repris dans la suite de ce dossier de La Recherche. Il conclut :

> Tout cela suggère qu'une formation de base solide en mathématiques restera la meilleure manière de former de futures générations d'informaticiens performants.

Cette première partie fait aussi un zoom sur Alan Turing et se termine par un historique rapide des outils de calcul de la pascaline en 1645 au premier processeur quantique en 2009.

La seconde partie, Savoirs, présente les articles suivants : *La lente émergence des algorithmes* ; *L'inévitable recours à l'informatique* ; *Où est né le premier ordinateur ?* ; *Comment Mandelbrot inventa les fractales* ; *Le surprenant parcours des ondelettes* ; *Du fil de fer au visage animé* ; *Décider qu'un problème n'a pas de solution* ; *Ces protéines vont-elles s'associer ?* ; *Apporter la preuve de la preuve* ; *Internet : un modèle pour réguler le trafic* ; *Les codes secrets face au calcul quantique.*

La troisième partie, Références, commence par un article sur *Ada Lovelace, visionnaire de la machine*, et enchaîne avec un article *L'ambition démesurée de formaliser la pensée* qui introduit des textes historiques originaux de Leibniz, Turing et von Neumann.

3 Petit x, No 87, 2011

Ce numéro est centré sur les connaissances didactiques des professeurs et leur utilisation dans un contexte de changement de programmes auquel les futurs maîtres du primaire et du secondaire ont à faire face. Je note un article de nos collègues québécois Laurent Theis et Jérôme Proulx avec la collaboration de Hassane Squalli : *Quelle influence les programmes d'études ont-ils ou peuvent-ils avoir sur la formation des maîtres en mathématiques ?* Ce texte s'appuie sur une première version publiée dans la revue Envol du GRMS. Il réfère à plusieurs articles publiés dans le Bulletin AMQ sur l'enseignement des mathématiques au Québec et sur les différents paradigmes qui ont ponctué son histoire.

Je note aussi un article du grand Guy Brousseau *Charlie Chaplin et la didactique des mathématiques*, une reconstruction tardive d'un cours de 1975, comme il le dit d'entrée de jeu.

> Ce cours prétend jeter les bases d'une approche scientifique d'une pratique sociale universelle et très ancienne, la transmission de connaissances mathématiques d'une société à une autre, d'une génération à une autre, d'un individu à un autre.

Selon Brousseau, il y a une assez forte parenté entre la fonction sociale et le métier de comédien, et celui de professeur. Un épisode d'enseignement est un spectacle :

> Le professeur met en scène des connaissances et fait entrer les acteurs dans un scénario à leur propos. L'observation ou l'analyse des enregistrements d'une leçon relève de la même méthode sémiologique que l'analyse d'un film : il faut identifier les épisodes significatifs à travers le découpage technique en séquences, examiner les « faits » , les rapporter à des intentions, à des lois, supposer et soumettre à la critique ces interprétations etc.

D'où son idée d'utiliser dans cette introduction à son cours de 1975 le film *Le cirque* de Charlie Chaplin, pour mettre en évidence une conception de la science didactique qu'il développera d'une façon explicite dans les années suivantes.

Un texte rempli d'observations, de remarques, de questions qui font réfléchir. À lire et à relire.

4 Et aussi ...

J'ai aussi parcouru un numéro hors-série de Sciences et avenir, *Le pouvoir infini des mathématiques*, qui met en valeur l'exposition *Mathématiques - un dépaysement soudain* à la Fondation Cartier pour l'art contemporain. Un numéro varié contenant des articles sur le cosmos, l'infiniment petit, la symétrie, les neurosciences, les biomathématiques, l'intelligence artificielle, les réseaux, les marchés financiers, les arts et des présentations des mathématiciens d'exception impliqués avec des artistes tout aussi réputés dans l'exposition de la Fondation Cartier.

Enfin, dans le numéro d'octobre 2011 de la revue Pour la Science, on annonce en page couverture et en gros caractères l'article *L'héritage de Galois : des équations et des courbes pour la cryptographie*, dans lequel on montre une application des corps finis découverts par Galois aux courbes elliptiques qui servent en cryptographie.

Je vous invite à m'envoyer vos commentaires et suggestions, et même, si le cœur vous en dit, vos recensions des revues qui vous ont intéressés le plus.

Bernard Courteau, courteaub@videotron.ca