Énigmes et jeux mathématiques

Énigmes et jeux mathématiques

Frédéric Gourdeau,
Département de mathématiques et de statistique,
Université Laval

Lors du dernier congrès de l'AMQ, tenu en octobre 2011 à l'École Polytechnique de Montréal, Richard Labib et Jonathan Daniel-Rivest ont proposé aux participants un défi qu'ils m'ont permis de reproduire ici.

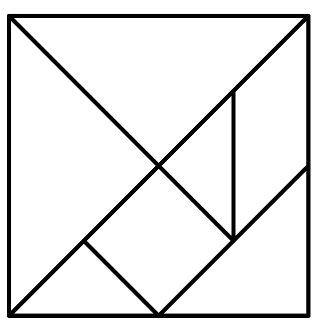
Le plus grand rectangle Le défi consiste à disposer les pièces du tangram en une seule figure, de façon à faire apparaître 4 sommets délimitant un rectangle ayant la plus grande surface possible, tout en respectant les contraintes suivantes :

1- Chacune des pièces utilisées doit posséder une arête horizontale ou verticale.

2- Chacune des pièces doit posséder un sommet en commun avec une autre pièce. (S'il existe un seul contact entre deux pièces, celui-ci doit être de sommet à sommet.)

3- Afin que la solution soit valide, le rectangle délimité par 4 sommets doit également avoir un côté horizontal.

Les pièces du tangram sont les polygones de la figure ci-dessous qui forment un carré : on supposera que le grand carré a un côté de longueur 4.



Comparaisons astucieuses Vous devez trouver comment déterminer les trois chevaux les plus rapides parmi vingt-cinq chevaux. Pour ce faire, vous pouvez les faire courir cinq à la fois et noter leur ordre d'arrivée, sans plus.

Quel est le nombre minimal de courses que vous devez faire pour connaître, dans l'ordre, les trois chevaux les plus rapides ? (Notez bien que l'on suppose que si un cheval est plus rapide qu'un autre, alors il le sera dans chacune des courses auxquelles ces deux chevaux prendront part.)

Aire d'un triangle Il y a plusieurs manières de calculer l'aire d'un triangle. Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle et soir R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Montrer que l'aire du triangle est $\frac{abc}{4R}$.

Solutions des problèmes du numéro de décembre 2011

1- Un tour de magie... ou presque Vous avez les yeux bandés. On vous remet un paquet de cartes en vous disant que 12 cartes sont tournées face vers le haut et que les 40 autres cartes sont face vers le bas. Ces cartes sont mélangées.

Votre tâche : sans retirer votre bandeau et en utilisant toutes les cartes, former exactement deux piles de cartes de telle manière que chacune ait le même nombre de cartes retournées la face vers le haut.

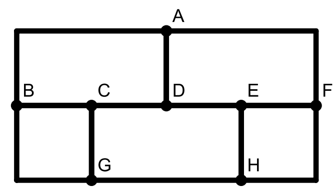
Solution. Il suffit de faire deux piles dont une compte 12 cartes, et de retourner la pile de 12 cartes. En effet, supposons qu'il y ait n cartes tournées face vers le haut dans la pile de 12 cartes (et $12-n$ dans l'autre pile) : après avoir retourné les cartes de la pile de 12, il y en aurait exactement $12-n$ tournées face vers le haut dans cette pile, comme dans l'autre.

2- Jeu de Nim en cercle On place dix jetons de manière à ce qu'ils forment un cercle. À tour de rôle, chaque joueur enlève soit un jeton, soit deux jetons qui doivent alors être adjacents (i.e. qu'il ne peut y avoir de trou qui sépare ces deux jetons). Le joueur qui enlève le dernier jeton gagne. Si les deux joueurs jouent parfaitement, lequel gagne ?

Solution. Il y a parfois des stratégies simples qui permettent de gagner des jeux de ce type. La plus facile est celle où on peut jouer tel un miroir, en faisant le même coup que l'adversaire ou un coup symétrique.

Ici, pour atteindre une position dans laquelle il peut utiliser cette stratégie, le second joueur peut s'assurer de jouer son premier coup de telle sorte qu'il reste à son adversaire soit deux blocs de 4 jetons adjacents, soit deux blocs de 3 jetons adjacents. Il lui suffit par la suite de jouer les mêmes coups que son adversaire mais dans le bloc opposé : son adversaire ne pourra jamais terminer avant lui !

3- Les cinq briques Pouvez-vous reproduire le dessin ci-dessous en trois traits de crayon sans repasser sur un trait ? Les traits peuvent se croiser mais il ne doit pas y avoir de segment que l'on trace deux fois. Si vous croyez que cela n'est pas possible, pouvez-vous expliquer pourquoi ce n'est pas possible ?



SOLUTION. Considérons la figure dans laquelle on a ajouté l'identification des sommets impairs : ce sont les points où se rencontrent un nombre impair de lignes. Il y en a huit.

Or, lorsque l'on trace une ligne sans repasser sur un trait, on ne peut créer au maximum que 2 sommets impairs : le sommet de départ et celui d'arrivée. En effet, pour tout autre sommet, chaque ligne y arrivant doit en repartir et les traits sont donc en nombre pair.

Comme on a huit sommets impairs, on a besoin d'au moins quatre traits de crayon.