Note mathématique

Une construction approchée des polygones réguliers

Roger Beaudet,
ingénieur retraité

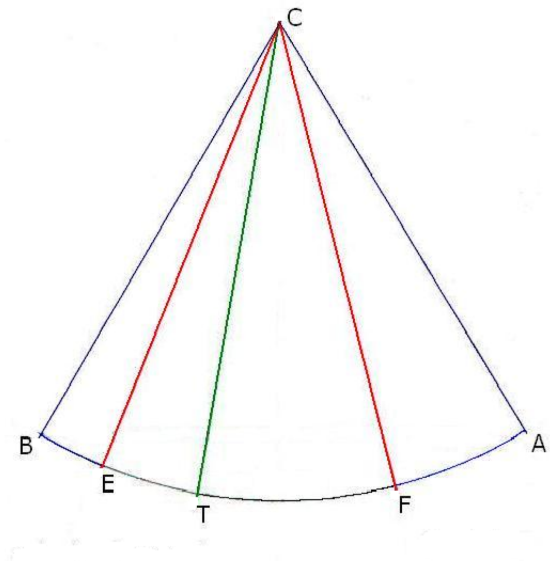
Résumé

Pour plusieurs problèmes de géométrie dont la construction avec la règle et le compas a été démontrée impossible, il existe des constructions géométriques approchées qui permettent d'atteindre un niveau de précision qui diffère très peu de la solution exacte, tout en n'utilisant que la règle et le compas. Le présent article propose une méthode simple pour réaliser la construction de tous les polygones réguliers convexes avec une erreur inférieure à 4.5 secondes d'arc par côté.

Introduction

La division de la circonférence en un nombre entier de parties égales est équivalente à la construction d'un polygone régulier d'un même nombre de côtés. Selon le fameux théorème de Gauss-Wantzel, les seuls polygones réguliers constructibles avec la règle et le compas sont ceux dont le nombre de côtés est une puissance de 2 ou le produit d'une puissance de 2 par un produit fini de nombres de Fermat ($F_n = 2^m + 1$ avec $m = 2^n$) premiers distincts. Comme les seuls nombres de Fermat premiers connus à ce jour sont $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65637$, le théorème de Gauss-Wantzel laisse beaucoup de polygones réguliers non constructibles (de façon exacte) avec la règle et le compas, dont en particulier ceux qui ont 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25... côtés. L'objectif de cette note mathématique est de donner une construction approchée de tous les polygones réguliers en n'utilisant que la règle et le compas. La plupart des constructions proposées jusqu'à maintenant ont un niveau de précision relativement faible avec des erreurs souvent supérieures à une minute d'arc. Par exemple, celle de M.Tempier (1819-1905) était considérée d'une excellente précision avec une erreur de 20 secondes par segment pour n=16. La méthode approchée qui est proposée ci-dessous permet d'atteindre un niveau de précision de beaucoup supérieur en procédant à la construction approchée de la $n^{ième}$ partie d'un angle AOB de 120 degrés, lequel peut facilement être construit avec le compas et dont le triple donne la circonférence. La méthode utilise des constructions géométriques simples telles la division d'une droite en n parties égales et surtout la proposition suivante.

Proposition 1 *Si une droite CT issue du sommet C à l'intérieur d'un angle BCA quelconque le divise dans un rapport donné n tel que $BCA = nBCT$, alors l'ajout ou le retrait simultané d'angles ECB et ACF dont le rapport est n sur chacun des côtés de l'angle BCA, conservera la propriété de la droite CT de diviser le nouvel angle ETF suivant le même rapport n.*



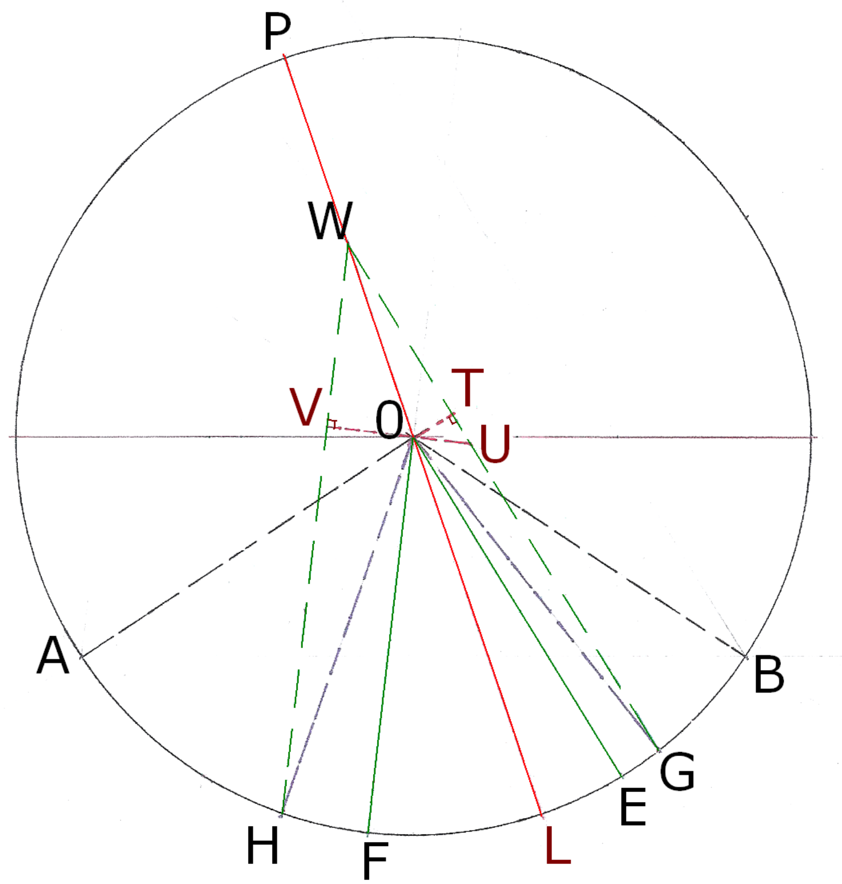
Démonstration Remarquons d'abord que $BCA = nBCT$ si et seulement si $TCA = (n–1)BCT$, puisque $BCT + TCA = BCA$.
Par hypothèse, on a donc les relations $TCA = (n–1)BCT$ et $ACF = (n-1)ECB$ et on doit démontrer que $TCF = (n-1)ETC$.
Mais $TCF = TCA + ACF = (n-1)BCT + (n-1)ECB = (n-1)ECT$.

Ainsi si la droite CT est la trisectrice de l'angle BCA (cas $n = 3$), elle conservera cette propriété pour l'angle ECF obtenu après avoir retranché les angles FCA et BCE.

Problème

Construire une droite OL divisant l'angle AOB dans un rapport donné n, c'est-à-dire tel que $AOB = nBOL$ ou encore tel que $AOL = (n-1)LOB$.

Idée d'une construction approchée



Supposons le problème résolu et que la droite OL divise l'angle AOB dans le rapport n, les points A, B et L étant sur le cercle de centre O. La proposition nous assure que la position relative de cette droite ne sera pas modifiée par le retrait simultané d'angles équivalents à $(n-1)$ cordes égales à AB/n pour définir l'arc AF et l'autre corde pour l'arc BE, afin de construire par soustraction l'angle EOF. La réitération du procédé avec l'angle EOF réduit ce dernier à une valeur se rapprochant de celle d'une ligne et permet de déterminer la position approchée de la droite OL. Avec l'ajout des cordes FE/n à l'angle EOF suivant le rapport n établi, on définit l'angle GOH sans modifier la position relative de OL. La parallèle à OE passant par G et la parallèle à OF passant par H se rencontreront alors en un point W.

Selon le théorème sur les angles, dans un cercle donné, les angles au centre sont proportionnels aux arcs compris entre leurs côtés. Ainsi, à des arcs égaux correspondent des angles égaux. Le fait d'utiliser les cordes plutôt que les arcs donne un angle FOH inférieur à $(n-1)/nEOF$ c'est-à-dire à l'angle AOL théorique. Il s'ensuit que le point W sera intérieur au cercle, bien que très près de ce dernier. Il va de soi que la solution exacte du problème exige que les angles FOH et LOF soient égaux, ce qui entraîne que le point W soit sur le cercle.

Construction

0- La donnée est un angle AOB où A et B sont sur un cercle de centre O.
1- On mène AB qu'on divise en n parties égales.
2- Du point A, *vers l'intérieur*, on juxtapose sur le cercle $(n-1)$ cordes de la même longueur que les segments définis sur AB, définissant ainsi un point F, et du point B, vers l'intérieur aussi, la corde restante dont l'extrémité définit le point E. L'angle AOB est ainsi réduit à l'angle EOF sans que la position de la droite cherchée ne soit affectée.
3- On mène EF qu'on divise aussi en n parties égales.
4- Du point F, *vers l'extérieur*, on juxtapose sur le cercle $(n-1)$ cordes de la même longueur que les segments définis sur EF pour déterminer le point H, et du point E la corde restante pour définir le point G.
5- Des points G et H on mène des droites parallèles aux rayons EO et FO respectivement, pour définir le point d'intersection W.
6- La droite WO est une approximation de la droite recherchée. Son intersection avec le cercle définit les points P et L.

Résultats

Le tableau suivant donne les résultats de la division de l'angle de 120°.

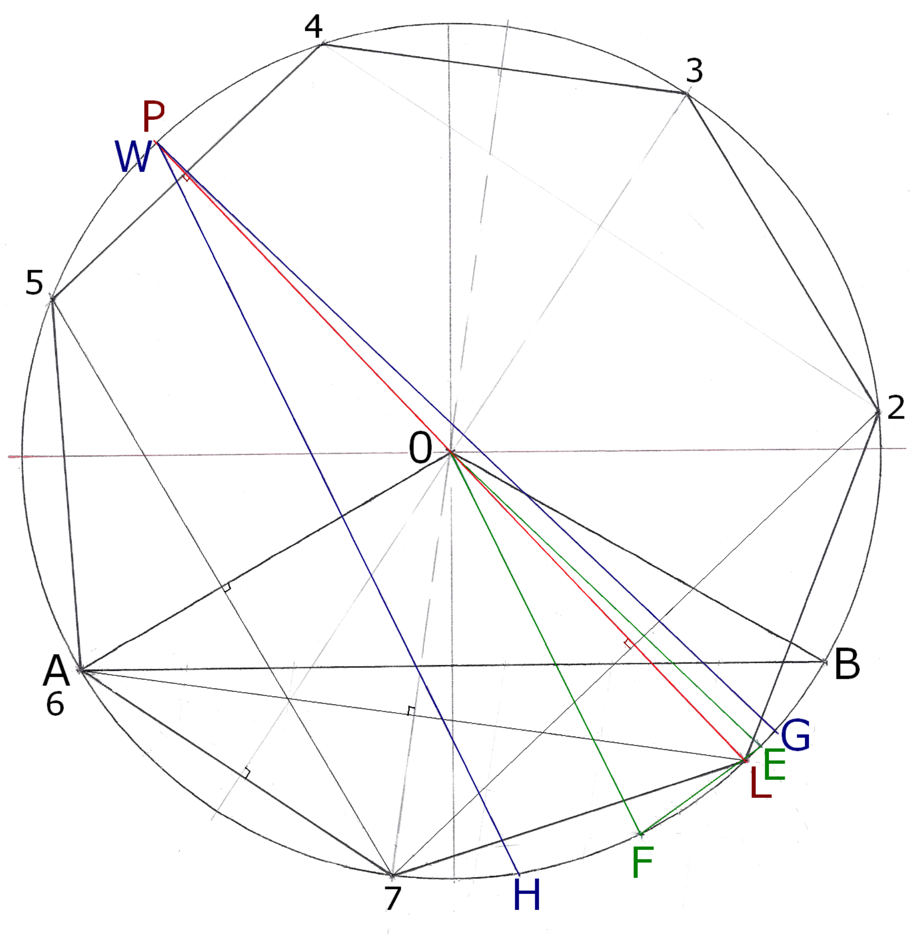
	RÉSULTATS POUR UN SECTEUR DE 120 DEGRÉS DIVISÉ PAR "N"									
FONCTIONS	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11	N=13	N=15	N=17	N=19	N=23
Angles **EOF** (degrés)	19.32807	20.25778	20.50588	20.60701	20.65799	20.68725	20.70558	20.71783	20.72640	20.73733
∠ EOF*(N-**1)/**N- ∠ **FOH**	0.05431	0.08096	0.09177	0.09737	0.10073	0.10295	0.10453	0.10569	0.10659	0.10789
Distance **WO** (% de R**)**	0.99584	0.99511	0.99492	0.99485	0.99481	0.99479	0.99478	0.99478	0.99477	0.99477
Angle **BOL** (degrés)	39.99977	23.99959	17.14245	13.33297	10.90876	9.23048	7.99974	7.05858	6.31557	5.21720
Valeurs Théoriques (degrés)	40.00000	24.00000	17.14286	13.33333	10.90909	9.23077	8.00000	7.05882	6.31579	5.21739
Erreurs Réelles (degré)	2.31E-04	4.09E-04	4.03E-04	3.66E-04	3.27E-04	2.93E-04	2.65E-04	2.41E-04	2.21E-04	1.88E-04

L'examen de ce tableau montre que l'ensemble des valeurs ne varient que légèrement avec celle de n. La valeur de l'angle EOF demeure presque constante à 20 degrés. L'écart entre l'angle FOL théorique, soit $(n-1)/nEOF$, et FOH demeure inférieur à 0.11 degré, soit moins de 7.5 minutes. Il en découle que la position du point W est à une distance de $0.995R$ du centre O, où R est le rayon du cercle. La comparaison de la valeur des angles BOL avec leur valeur théorique confirme *la précision du procédé.* (Pour $N = 5$ l'erreur réelle est de 0.0245 min.)

Construction des polygones convexes réguliers à n côtés.

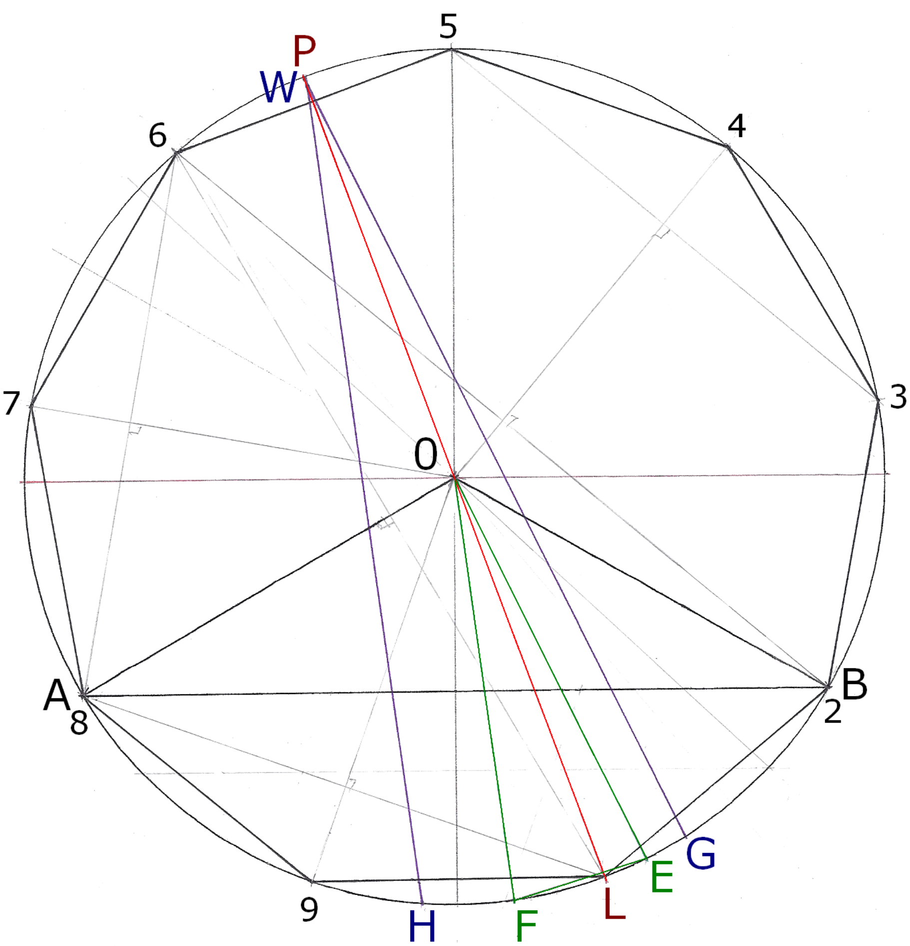
Pour construire des polygones convexes réguliers à n côtés, il suffit de déterminer la $n^{ième}$ partie de l'angle de 120 degrés au moyen de la construction décrite ci-dessus. On obtient ainsi le côté d'un polygone de $3n$ côtés dont trois unités successives sera l'équivalent d'un côté du polygone régulier de n côtés. L'erreur pour un côté du polygone sera égale à trois fois celle de la $n^{ième}$ partie de 120 degrés.

1- L'heptagone (7 côtés)



La méthode graphique proposée donne pour résultat la valeur de 17.1424537 degrés pour la septième partie de 120 degrés. Cela donne 51.4273611 degrés pour la septième partie de 360 degrés, au lieu de la valeur théorique de 51.4285714. L'erreur pour un côté du polygone est donc de 0.0012103 degré, et pour la totalité du polygone, l'erreur réelle est de 0.0084721 degré, soit 0.5083 minute.

2- L'ennéagone (9 côtés)



Cette figure est particulière du fait que le triple de la valeur de la neuvième partie de 120 degrés est égale à la troisième partie de 120 degrés. Il suffit donc d'appliquer notre construction pour $n = 3$. On obtient 39.9997687 degrés au lieu de la valeur théorique de 40.0000000, soit une erreur de 0.0020817 degré (ou 0.1249 minute) pour la totalité du polygone.

Résultats Polygones Réguliers Convexes						
Erreurs Réelles et Relatives Maximales						
N	Angle /Côté		Erreur(Minutes)		Erreur	Remarques
Cotés	Théorique	Méthode	Réelle/Côté	N Côtés	Relative	
3	120.0000	119.9993	0.0416	0.125	5.78E-06	
9	40.0000	39.9998	0.0139	0.125	5.78E-06	
5	72.0000	71.9988	0.0736	0.368	1.70E-05	
15	24.0000	23.9996	0.0245	0.368	1.70E-05	
7	51.4286	51.4274	0.0726	0.508	2.35E-05	
21	17.1429	17.1425	0.0242	0.508	2.35E-05	
9	40.0000	39.9989	0.0659	0.593	2.74E-05	Appliquer : Erreur (N côtés) et Relative
27	13.3333	13.3330	0.0220	0.593	2.74E-05	
11	32.7273	32.7263	0.0589	0.648	3.00E-05	
33	10.9091	10.9088	0.0196	0.648	3.00E-05	
13	27.6923	27.6914	0.0528	0.687	3.18E-05	
39	9.2308	9.2305	0.0176	0.687	3.18E-05	
15	24.0000	23.9992	0.0477	0.715	3.31E-05	Appliquer : Erreur (N côtés) et Relative
45	8.0000	7.9997	0.0159	0.715	3.31E-05	
17	21.1765	21.1757	0.0434	0.737	3.41E-05	
51	7.0588	7.0586	0.0144	0.737	3.41E-05	
19	18.9474	18.9467	0.0397	0.754	3.49E-05	
57	6.3158	6.3156	0.0132	0.754	3.49E-05	
23	15.6522	15.6516	0.0339	0.780	3.61E-05	
69	5.2174	5.2172	0.0113	0.780	3.61E-05	

Le tableau ci-dessus donne les erreurs réelles (en minutes) et relatives pour les valeurs de n comprises entre 3 et 23, et pour le triple de ces valeurs. Les polygones réguliers convexes de 7,9,11,13,19,21,23 côtés sont connus comme n'étant pas constructibles de façon exacte à la règle et au compas.

Conclusion

Les constructions graphiques qui ont été utilisées dans les procédés décrits ci-dessus sont totalement constructibles avec la règle et le compas. Elles ne permettent pas une solution géométrique exacte du problème de la division du cercle, il s'agit de solutions approchées. Cependant, elles permettent de déterminer la position de la droite recherchée avec une erreur ou un écart à la position exacte inférieur à 0.0245 minute d'arc, soit un arc de 1 mm d'un cercle d'un rayon de 140 mètres. Bien que leur application puisse sembler compliquée, elle requiert beaucoup moins de temps que pour les décrire. L'histoire nous apprend que pour décrire la construction du polygone régulier à 257 côtés, il fallut 194 pages de textes variés à M. J.F.Richelot.