Article

Autour du théorème de la progression arithmétique

Olivier Bordellès,
Lycée Charles-et-Adrien Dupuy,
Le-Puy-en-Velay, France,

Norbert Verdier,
IUT de Cachan, Cachan, et
Groupe d'Histoire des sciences d'Orsay, Orsay,
France

Résumé

Cet article est constitué d'une variation en deux parties autour du théorème dit *de la progression arithmétique*. La première variation est historique. Elle met de l'avant les relations qui unissaient Paris à Berlin dans la première moitié du XIX^{e} siècle. La seconde partie est une variation mathématique autour de la démonstration du théorème en question.

1 Variations historiques

À travers un exemple précis, nous allons montrer un moment intense de sociabilité savante entre Paris et Berlin dans la première moitié du XIX^{e} siècle[1]. Moment de rencontre entre des hommes, Liouville, Dirichlet, Tchebichef, Riemann. Moment de circulation de textes et d'idées via les journaux mathématiques. Les acteurs transforment alors l'arithmétique par des outils analytiques. Le « continu » au service du discret en quelque sorte.

Dès 1785, à l'Académie des sciences de Paris, Adrien Marie Legendre (1752-1833) annonce, sans démonstration, le théorème dit « de la progression arithmétique » : *Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers*. Il revient à ce résultat, en 1808, dans la seconde édition de son *Essai sur*

[1] Nous avons étudié dans notre thèse [20] la sociabilité savante au XIX^{e} siècle dans un cadre beaucoup plus large à partir de l'étude du *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

la théorie des nombres, en essayant de le démontrer par voie arithmétique. Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) conteste cette voie et démontre le théorème, en 1837, à l'Académie de Berlin, par voie analytique et novatrice. En octobre 1839, par le biais d'une traduction du texte de Dirichlet dans le *Journal de Liouville*, le théorème, enfin démontré, rentre à Paris, six ans après la mort de son annonciateur. Par la variation d'un énoncé dans différents supports, nous allons montrer comment l'argumentaire parviendra à maturité.

1.1 Legendre 1785 ou le coup de Fermat !

En 1785[2], Legendre propose un assez long mémoire à l'Académie royale des sciences intitulé *Recherches d'analyse indéterminée* [7]. Legendre dans ce mémoire propose en quatrième partie *Divers théorèmes relatifs aux nombres premiers* en terminant par la remarque suivante :

> Il seroit peut-être nécessaire de démontrer rigoureusement une chose que nous avons supposée dans plusieurs endroits de cet article, savoir, qu'il y a une infinité de nombres premiers compris dans toute progression arithmétique, dont le premier terme & la raison font premiers entr'eux [...]. Cette proposition est assez difficile à démontrer, cependant on peut s'assurer qu'elle est vraie, en comparant la progression arithmétique dont il s'agit, à la progression ordinaire $1, 3, 5, 7$, &c. Si on prend un grand nombre de termes de ces progressions, le même dans les deux, & qu'on les dispose, par exemple, de manière que le plus grand terme soit égal à la même place de part et d'autre ; on verra qu'en omettant de chaque côté les multiples de $3, 5, 7$, &c jusqu'à un certain nombre premier p, il doit rester des deux côtés le même nombre de termes, ou même il en restera moins dans la progression $1, 3, 5, 7$, &c. Mais comme dans celle-ci, il reste necessairement des nombres premiers, il en doit rester aussi dans l'autre. Je me contente d'indiquer ce moyen de demonstration qu'il seroit trop long de detailler, d'autant plus que ce Memoire passe déjà les bornes ordinaires.

1.2 Legendre ou un premier « Essai sur la théorie des nombres »

Legendre, dans la préface de son *Essai sur la théorie des nombres*[3], explique ses intentions : il propose un « essai qui feroit connoître à peu près l'état actuel de la science, et qui contribuera peut-être à en accélérer les progrès ». Il ne revient pas exactement sur son coup précédent : y a-t-il « une infinité de nombres premiers compris dans toute progression arithmétique, dont le premier terme & la raison sont premiers entr'eux » ? Mais il se questionne sur des questions de finitude : « Supposons

[2]En 1637, Fermat avait annoté son exemplaire de l'*Arithmetica* de Diophante à propos de l'impossibilité de trouver des entiers (non nuls) solutions de l'équation : $x^n + y^n = z^n$. Il indiquait détenir une démonstration merveilleuse mais que la marge était trop étroite pour la contenir. Les mathématiciens ont cherché à remplir cette marge pendant plus de 350 ans. En 1995, Andrew Wiles a définitivement démontré le « grand » théorème de Fermat.

[3]Le tirage de cet ouvrage a dû être très restreint, tant il est difficile à trouver et tant il est peu cité. Un exemplaire est consultable à l'annexe de la bibliothèque de l'Observatoire de Meudon. Je remercie pour la mise à disposition et les copies de cet ouvrage Mmes Eliane Rose & Eliane Michel (Bibliothèque, IUT Cachan) et Mme Catherine Bourgeois (Bibliothèque de l'Observatoire de Meudon). Cf. [8]. À noter que cet essai a été publié en 1797, ce qui correspond à l'an 6.

donc que A et B sont premiers entr'eux ; et parce qu'alors la formule $Ax+B$ peut représenter divers nombres premiers, cherchons combien il y a de ces nombres dans la progression $A+B$, $2A+B, \ldots,$ $nA+B$ ». Il propose et « démontre »[4] l'estimation suivante :
« il faudra former le produit $n \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{\omega-1}{\omega}$ dans lequel on fera entrer tous les nombres premiers 3, 5, 7 jusqu'au plus grand ω compris dans $\sqrt{nA+B}$, en exceptant seulement ceux qui divisent A. Cela posé, si $A+B$ est plus grand que $\sqrt{nA+B}$, la formule précédente sera le nombre demandé. Mais si $A+B$ est plus petit que $\sqrt{nA+B}$, il faudra ajouter à cette formule autant d'unités qu'il y a de nombres premiers moindres que dans la suite proposée $A+B$, $2A+B, \ldots,$ $nA+B$. »

Il détaille ensuite son algorithme sur un exemple :

Exemple 1 *« Veut-on savoir, par exemple, combien il y a de nombres premiers dans les* 1000 *premiers termes de la suite 49, 109, 169, 229, 289, 249, &c dont le terme général est* $60x-11$ *? Le millième terme est* 59989*, sa racine quarrée 244, et le nombre premier prochainement moindre 241 ; d'ailleurs 60 est divisible par 3 et par 5 ; donc il faut prendre pour diviseurs tous les nombres premiers depuis 7 jusqu'à 241 inclusivement, ce qui donnera pour l'expression du nombre demandé*

$$1000\left(\frac{6}{7}\times\frac{10}{11}\times\frac{12}{13}\times\frac{16}{17}\times\frac{18}{19}\times\frac{22}{23}\times\cdots\times\frac{240}{241}\right)+2.$$

J'ajoute 2 unités, parce qu'il y a dans les premiers termes de la suite deux nombres premiers 109 et 229 moindres que 241. »

Il achève son calcul en construisant une table numérique : « il seroit nécessaire d'avoir une table des valeurs du produit $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{10}{11}\times\cdots$ &c formé avec la suite des nombres premiers, et borné successivement à chacun de ces nombres. » Il obtient « qu'il y a environ 380 nombres premiers compris dans les 1 000 premiers termes de la suite arithmétique 49, 109, 169, &c ».[5]

Il poursuit en prenant d'autres exemples comme « combien il y a de nombres premiers au-dessous de 1000 » [Exemple 2], et « de 100 000 » [Exemple 3]. Dans le premier cas, avec son procédé, il en trouve « environ 165 (il est réellement 169, l'aberration étant causée par les fractions) » et dans le deuxième cas, il en trouve 9715. Il donne une indication sur l'erreur commise : « L'erreur dans ce résultat, ne peut s'élever à 66 ; ce qui fait à peine la 146^e partie du total. »

[4]En fait, sa démonstration se ramène à un « par un raisonnement semblable » qui s'appuie sur un résultat démontré, en bonne et due forme, dans le paragraphe précédent [8, § XXII, pp. 14].
[5]En réalité, il y en a 366.

Une étude précise des exemples de Legendre fournit le tableau synthétique suivant :

Exemple i	Estimation (Legendre)	Valeur exacte (Legendre)	Valeur exacte
Exemple 1	380		366
Exemple 2	165	169	168
Exemple 3	9715	9715 ± 66	9592

Autrement dit, Legendre s'est « légèrement » trompé. Cela dit, il ne se contente pas d'estimations numériques. Dans une note de bas de page, il estime que le nombre b de nombres premiers « compris dans la progression naturelle 1, 2, 3, 4, 5,$\ldots, a$ » est donné par la formule (« lorsque a est très grand »)

$$b = \frac{a}{A \log a + B} \quad ,$$

A et B étant des coefficiens constants, et $\log a$ désignant un logarithme hyperbolique. Avant de jeter une piste prémonitoire[6] : « La détermination exacte de ces coefficients seroit un problème curieux et digne d'exercer la sagacité des Analystes ». Mais avant de laisser la place aux analystes et avec toute sa pugnacité arithmétique, Legendre revient à son étude en 1808.

1.3 Legendre 1808 ou le coup du « lemme induit », l'arithmétique défaillante !

Dans sa seconde édition [9] de *Essai sur la théorie des nombres*, parue en 1808, chez Courcier, à Paris, Legendre approfondit son travail de l'an 6 :

« Soit proposée la progression arithmétique (Z) $A - C$, $2A - C$, $3A - C, \ldots, nA - C$, dans laquelle A et C sont des nombres quelconques premiers entre eux [...] Cela posé, soit $q, l, m, \ldots, y, w$, une suite de nombres premiers, pris à volonté, dans un ordre quelconque, mais dont aucun ne divise A. Nous allons chercher quel est, dans la progression (Z), le plus grand nombre de termes consécutifs qui seraient divisibles par quelqu'un des nombres de la suite $q, l, m, \ldots, y, w$, que nous appellerons (a). »

[6] Legendre s'intéresse là à une étude qu'on nomme aujourd'hui « étude de la raréfaction des nombres premiers ». La même année que Legendre, en 1798, Gauss, en examinant des tables, avait estimé également que $\pi(x)$ (le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x) était approximativement égal à $x/\ln x$ pour les grandes valeurs de x. Au siècle suivant, de nombreux mathématiciens ont essayé de démontrer ce résultat. En 1896, ce fut chose faite avec le français Jacques Hadamard et le belge Charles de La Vallée Poussin. D'autres précisions furent apportées grâce à Riemann et sa fonction zêta.

Ensuite, « [i]l faut pour cet effet examiner d'abord les cas les plus simples », dit-il. Ainsi, il détaille le cas où « sa » suite (a) comprend deux termes :

« Si l'on ne considère que deux nombres premiers q, l, il ne peut y avoir plus de deux termes consécutifs divisibles l'un par q, l'autre par l, et ces termes peuvent être désignés par (q), (l). Le terme qui suit (l) ne peut être divisible par q, car l'intervalle avec (q) n'étant plus que de deux termes, il faudrait qu'on eût $q = 2$; mais ce cas est exclu, et nous ne considérons dans la suite (a) que des nombres premiers impairs. Par la même raison, le terme qui précède (q) ne saurait être divisible par l et encore moins par q ; donc dans ce premier cas le maximum cherché $M = 2$. »

Il poursuit, sur plusieurs pages, son étude en étudiant consciencieusement les cas suivants. On peut synthétiser son étude par le tableau ci-dessous :

Longueur de (a)	2	3	4	5	6	7
M	2	$4^{(1)}$	$6^{(2)}$	$10^{(3)}$	$12^{(4)}$	$16^{(5)}$

(1) « encore faut-il que l'un de ces nombres premiers [ceux de la suite (a)] soit 3 » précise Legendre ;
(2) « lorsque deux des quatre nombres premiers sont 3 et 5 [pris dans (a)] » précise Legendre ;
(3) où (a) doit contenir les nombres premiers 3, 5 et 7 ;
(4) où (a) contient 3, 5, 7 et 11 ;
(5) où (a) contient 3, 5, 7, 11 et 13.

Il termine l'étude de sa question en proposant, sans démonstration, une généralisation :

« Il n'est pas moins facile de voir en général, que si la suite (a) est composée de k nombres premiers, dont deux, y et w, et les $k-2$ autres forment la suite naturelle 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. jusqu'à $p^{(k-2)}$; le maximum cherché sera $M = p^{(k-1)} - 1$, $p^{(k-1)}$ étant le terme de rang $k-1$ dans la suite des nombres premiers 3, 5, 7, 11, etc. »

Ensuite, de son lemme, il déduit assez directement que : « Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux, contient une infinité de nombres premiers ». Il n'omet pas de préciser qu'il avait déjà annoncé ce résultat dès 1785 :

« Cette proposition, qui est très utile dans la théorie des nombres, avait été indiquée dans les Mémoires de l'Académie des sciences, an 1785 ; mais jusqu'à présent sa démonstration n'était point encore connue et paraissait offrir de grandes difficultés. »

1.4 Dirichlet ou Berlin 1837, l'analyse triomphante

Berlin, 27 juillet 1837, Académie des sciences de Berlin. Dirichlet[7] lit son *Mémoire* : un extrait [10] est publié[8]. Si Legendre n'est pas nommément évoqué dans l'extrait publié, Dirichlet précise bien dans son *Mémoire* que Legendre « qu'[il] sache, [est] le seul analyste qui ait essayé de le démontrer [théorème de la progression arithmétique] » mais ne se satisfait pas de sa « démonstration ». « L'illustre géomètre fait dépendre sa démonstration de la solution de cette question : étant donnée une suite quelconque de nombres premiers impairs, trouver le plus grand nombre des termes consécutifs d'une progression arithmétique qui seraient divisibles par quelqu'un des nombres de la suite ; mais la solution qu'il donne n'est fondée que sur une induction ». Dirichlet fait référence à la seconde édition de l'essai de Legendre ; la première édition n'est sans doute pas passée outre-Rhin.

De manière naturelle, Dirichlet essaie de démontrer le « lemme » de Legendre mais doit finalement renoncer : « En essayant de prouver l'exactitude de cette solution, d'une simplicité si remarquable, on rencontre des difficultés qu'il m'a été impossible de surmonter. Ce n'est qu'après avoir abandonné cette voie que je suis parvenu à la démonstration rigoureuse du théorème. »

Ensuite, il se lance dans « sa » démonstration en abandonnant complètement la « voie Legendre ». La sienne n'est plus « purement arithmétique, puisqu'elle est fondée en partie sur la considération de grandeurs continues. » Sa voie « analytique » est intéressante par le résultat qu'elle produit – à savoir la démonstration d'un résultat annoncé 52 ans plus tôt à Paris – mais aussi et surtout pour la « nouveauté des principes », détaillée ultérieurement. Le travail de Dirichlet est comme un lointain écho à la préface de l'essai (première édition) de Legendre : « j'espère que les fautes même dans lesquelles j'aurois pu tomber, tourneront au profit de la science, en donnant occasion à des mains plus habiles de traiter le même sujet, et de la porter à un plus haut degré de perfection. »

1.5 Dirichlet 1839 ou le retour à Paris !

En 1839, deux ans plus tard[9], est enfin publié le texte complet [11] de Dirichlet. Presque aussitôt, en octobre 1839, il est traduit en français [12] dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* fondé par Liouville trois ans plus tôt : c'est le grand retour à Paris du « théorème de Legendre ». Joseph Liouville annote, comme à son habitude, en bas de page de l'article : « Nous devons à l'obligeance de M. Terquem[10] la traduction de cet excellent Mémoire imprimé en allemand dans le recueil

[7] Dirichlet, de son vrai nom Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, est déjà estimé dans le monde mathématique ; depuis 1833, il est correspondant pour la section de géométrie de l'Académie des sciences, à Paris. Dans son dossier personnel, aux Archives de l'Académie des sciences à Paris, on trouve une lettre de remerciement à Libri pour cette nomination.

[8] Toutes les citations de ce paragraphe sont extraites de la traduction française [12] dont il est question dans le paragraphe suivant.

[9] Notons que ce décalage de deux ans entre la lecture d'un mémoire à l'académie et sa publication intégrale sera le délai « normal » jusqu'en 1850, date à partir de laquelle il sera ramené à un an (comme cela avait été le cas, exceptionnellement, en 1838).

[10] Olry Terquem (1782-1862) est un ancien élève de l'Ecole polytechnique qui a enseigné les mathématiques à Mayence avant d'obtenir, pour presque un demi-siècle, le poste de bibliothécaire du Dépôt central d'artillerie à Vincennes. Érudit et polyglotte, il a joué un rôle central dans la presse mathématique de la première moitié du XIX^{e} siècle en

de l'Académie de Berlin ». Dans les *Comptes rendus*, datés du 6 janvier 1840, une lettre de Dirichlet à Liouville est publiée :

« En voyant dans votre Journal l'élégante traduction que M. Terquem a bien voulu faire de mon Mémoire sur la progression arithmétique, j'ai eu l'idée d'étendre la même analyse aux formes quadratiques. En combinant cette analyse avec les considérations ingénieuses que M. Gauss développe dans les derniers numéros de sa cinquième section, on prouve non-seulement que toute forme quadratique renferme une infinité de nombres premiers, mais encore qu'elle en contient qui soient d'une forme linéaire quelconque, compatible avec la forme quadratique donnée »[13]. La lettre ouvrira le cahier de février du *Journal de Liouville*. Un va-et-vient de plus entre les *Comptes rendus* et le *Journal de Liouville* !

Notons que le lien entre formes autres que linéaires et nombres premiers n'est pas nouveau. Dès 1772[11], Euler indique que si dans le polynôme $x^2 + x + 41$ on remplace successivement x par $0, 1, 2, 3, \ldots$, on a la suite $41, 43, 47, 53, 61, 71, \ldots$ dont les quarante premiers termes sont premiers. Legendre lui-même montre qu'en général « il n'existe aucune formule algébrique qui ne représente que des nombres premiers ». Il prend ensuite un exemple générique :

« soit, par exemple, la formule $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$, et supposons qu'en faisant $x = k$, la valeur de P soit égale au nombre premier p. Si on fait $x = k + py$, y étant un entier quelconque, on aura

$$P = p + (3ak^2 + 2bk + c)py + (3ak + b)p^2y^2 + ap^3y^3.$$

D'où l'on voit que P n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par p et différent de p »[8].

Legendre fait par ailleurs référence à « une foule d'autres » résultats du même ordre, mais ce sont des résultats isolés. Avec Dirichlet, par la force de l'analyse, l'arithmétique élémentaire sera transcendée ; il mérite incontestablement (sans pour autant dénigrer les travaux de Legendre) qu'on lui attribue le théorème de la progression arithmétique, car il a offert à l'arithmétique toute la puissance des outils analytiques. Il entraînera dans son sillage toute une classe de mathématiciens, dont Liouville.

1.6 Liouville–Dirichlet ou la naissance d'une amitié mathématique !

Liouville[12], dans son journal, dans ses carnets, dans ses cours, fait sans cesse référence aux travaux de Dirichlet. Leur rencontre remonte probablement à 1839. En tout cas, une lettre de Liouville à

participant notamment activement au *Journal de Liouville* puis en co-fondant avec Gérono les *Nouvelles annales de mathématiques*, en 1842. Pour en savoir plus sur Terquem, on peut consulter : « Notice sur la vie et les travaux d'Olry Terquem », *Bulletin Mathématique*, t.VIII, Novembre 1862, pp. 81-90 ainsi que : M. Chasles, « Rapport sur les travaux mathématiques de M. O. Terquem », *Ann. de Mathémat.*, 2e série, t.II, Juin 1863, pp. 241-251. Terquem, personnage aujourd'hui – hélas – méconnu, a été par son érudition un passeur de sciences entre l'Allemagne et la France.

[11] *Mémoires de Berlin*, an 1772, pp. 36.

[12] Cf. Erwin Neuenschwander, « Joseph Liouville (1809-1882) : Correspondance inédite et documents biographiques provenant de différentes archives parisiennes », in *Bolletino di Storia delle Scienze Matematiche*, Vol. IV (1984), fasc. 2, pp. 87–104. Le dossier Liouville à la Bibliothèque de l'Institut de France à Paris, constitué de 340 cahiers manuscrits, confirme la relation amicale et scientifique unissant les deux hommes.

Dirichlet, le 10 février 1853, précise : « Je conserve toute l'amitié dont vous m'avez vu animé pour vous quand j'ai eu le bonheur de vous voir à Paris en 1839 »[18, pp. 48]. Il est fort probable que Liouville et Dirichlet se sont rencontrés à l'Académie des sciences au cours du premier trimestre 1839.

Ensuite, les choses s'emballent. Liouville et Dirichlet se rencontrent chez Cauchy, à Sceaux (la maison de Cauchy fait actuellement partie du lycée Marie-Curie de Sceaux), lors d'un dîner organisé fin juillet 1839. Cauchy était rentré un an plus tôt de Prague, où il avait passé plusieurs années suite à la Révolution de 1830 pour éduquer le Duc de Bordeaux, Henry, petit-fils de Charles X[13]. Cauchy souhaitait reprendre pied avec la nouvelle génération, lui qui avait connu les Ampère, Legendre, Fourier, etc. Il convie à ce dîner Catalan, Liouville et Dirichlet comme l'attestent les pièces de correspondances suivantes. Nous possédons une lettre de Cauchy à Catalan :

« Monsieur et cher Confrère,

Vous m'aviez promis de venir dîner un jour avec nous à Sceaux, et je viens vous demander aujourd'hui de vouloir bien accomplir cette promesse mardi prochain, après la séance de l'académie. Nous dînerons à six heures, et j'attends cette fois une réponse favorable. Comme nous voudrions avoir avec vous M. Dirichlet dont je ne sais pas l'adresse, j'ai recours à vous, et vous prie encore d'avoir la complaisance de lui transmettre le billet cy-joint. »([5, pp. 289, Lettre no. 27]).

Le « billet cy-joint » avait la forme suivante :

« Monsieur et cher confrère, Je viens vous prier de vouloir bien remplir la promesse que vous m'avez faite l'autre jour, en venant dîner avec nous à Sceaux mardi prochain. Nous dînerons à six heures et M. Liouville doit être aussi des nôtres. »([1, pp. 209, note no. 2]).

Le dîner aurait eu lieu le 30 juillet 1839. On ne connaît pas les détails de la rencontre, qui mettait en présence un légitimiste convaincu (Cauchy), un ardent révolutionnaire (Catalan), un radical modéré (Liouville) et un « mondain » (Dirichlet). Ce dîner « entre amis » constitue une sorte de reconnaissance « officielle » de la montée en puissance d'une nouvelle génération, par l'un des grands maîtres de la première moitié du XIX^{e}, Cauchy en personne. On peut penser que la traduction du mémoire de Dirichlet a été commandée par Liouville auprès de Terquem, qui était un proche de Liouville. Une amitié mathématique est née. Liouville consacre un de ses cours au Collège de France[14], en 1839-1840, au théorème de la progression arithmétique. Plus généralement, le cours portait, au premier semestre 1839-1840, sur les intégrales définies. Ce cours est l'un des mieux connus de Liouville, car on possède les notes d'Adhémar Barré de St Venant[15] : il a été étudié par Bruno Belhoste et Jesper Lützen [2]. La structure commence classiquement (les neuf premières leçons). Ensuite, Liou-

[13] Le passage de Cauchy à Prague est traité dans un article de vulgarisation récemment publié « Le mathématicien victime de la révolution de 1830 », *Historia*, no. 712, Avril 2006, pp. 30–32.

[14] Liouville entre 1837 et 1843 est le suppléant de Biot au Collège de France (BIF, MS 36 15 (5) & Archives du Collège de France, Dossier Liouville, Lettre du 19 juin 1843).

[15] Archives de l'École polytechnique, Fonds Saint Venant, carton no. 12, No. 1964 à 1968.

ville s'adonne à la théorie des nombres et plus particulièrement à l'étude de mémoires de Dirichlet. La dernière leçon de théorie des nombres, celle du 28 janvier 1840, est ainsi consacrée au théorème de la progression arithmétique, enfin à sa démonstration dans un cas particulier : une progression arithmétique dont la raison est un nombre premier de la forme $4m + 3$ renferme une infinité de nombres premiers.

Dès 1839, Liouville ne cessera de faire paraître dans son *Journal* des articles de Dirichlet, soit des articles originaux (sept), soit des articles traduits provenant de l'Académie de Berlin ou du *Journal de Crelle*[16].

Plus tard, quand Liouville aura un poste de professeur au Collège de France (en 1851), il continuera à louer les apports de son ami Dirichlet, qu'il contribuera à faire connaître en France en publiant plusieurs de ses mémoires. Il est probable que Liouville ait également organisé la rencontre entre Tchebichef et Dirichlet à Berlin, en 1852.

1.7 Berlin, fin octobre 1852 : rencontre entre Tchebichef et Dirichlet

En 1852, Tchebichef fait un voyage « à l'étranger », dont il tirera son « Rapport du professeur extraordinaire de l'université de St Pétersbourg Tchebychef sur son voyage à l'étranger »[14]. Le 28 juin 1852, il arrive à Paris et s'adresse « au célèbre géomètre Liouville, membre de l'Académie des sciences de Paris et éditeur d'un journal de mathématiques, auquel [Tchebichef] collabore depuis 1842. »[17] Le professeur Tchebichef venait de faire une entrée fracassante dans le monde de l'arithmétique en démontrant le postulat de Bertrand – affirmant qu'entre un nombre (supérieur strictement à 1) et son double vient toujours se lover au moins un nombre premier – par des procédés analytiques bâtis sur de subtiles inégalités qui feront date [3]. Il profite de son voyage en Europe de l'Ouest pour rencontrer « grâce à l'obligeance de ce géomètre [Liouville][18], les savants dont le concours était d'une grande importance pour le succès de [son] voyage. » Il rencontrera cet été-là l'élite des mathématiques européennes, en France (avec Cauchy, Hermite et Serret entre autres), mais aussi en Angleterre (avec Sylvester et Cayley) et enfin Dirichlet, en Allemagne, sur le chemin du retour.

Il arrive à Berlin le 26 octobre 1852 avec un but en tête : « Il m'intéressait beaucoup de faire la connaissance du célèbre géométre Dirichlet. Parmi les investigations faites par ce savant en l'Ana-

[16]La plupart des papiers de Dirichlet sont écrits en français comme le précise une notice de ses travaux : « La plupart des mémoires de Mr Dirichlet sont écrits en français et quelques-uns en allemand. Ils sont insérés dans le Recueil de l'Académie de Berlin, dans le Journal de mathématiques de Mr Crelle à Berlin, et dans celui de Mr Liouville à Paris. »(Archives Nationales (F 17/3584)). En réalité, sur les 52 articles de Dirichlet recensés dans le *Catalogue of Scientific Papers* (Vol. 3, 1869, pp. 945–947, compil. and publ. by the Royal Society of London), 22 ont été écrits en français, 1 en latin et 29 en allemand.

[17]François Jongmans émet une hypothèse sur les circonstances de la publication du premier texte de Tchebichef, en juin 1843, dans le *Journal de Liouville*, par l'entremise d'un certain Pierre de Tchihatchef. ([6, pp. 39])

[18]Liouville avait l'habitude d'écrire des lettres de recommandation pour un confrère, un ami, un membre de sa famille, un "cher compatriote" (un lorrain), un "camarade" (polytechnicien), etc. Tchebichef a sûrement bénéficié de ce traitement.

lyse, la première place appartient à ses principes de l'application du calcul des infiniment petits à la recherche des propriétés des nombres. Mais il n'a été publié jusqu'à ce jour qu'une certaine partie de ses recherches sur cette question ; quant au reste de ses travaux nous n'en savons rien, excepté quelques résultats définitifs restés sans démonstration. »(Cf. [14, pp. XVII]).

Tchebichef ne passera que quatre jours à Berlin mais le séjour sera intensif. On possède peu d'informations sur la rencontre, mis à part ce qu'il décrit dans son rapport. A vrai dire, il n'entre pas dans les détails mathématiques. Il précise juste qu'il vient de présenter son travail « Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée ». Soumis en 1848 à l'Académie de Berlin, celui-ci avait été publié en 1851 dans les *Mémoires des savans étrangers* de cette académie[19]. Tchebichef indique qu'il a dû rectifier « la formule trouvée, par analogie, par Legendre » et que Dirichlet « parlant de ses recherches touchant cette question, ne dit rien de l'inexactitude de la formule de Legendre. » Sa pérégrination berlinoise permet à Tchebichef de multiplier les rencontres avec Dirichlet. « Pendant mon séjour à Berlin je trouvai chaque jour l'occasion de m'entretenir avec ce géomètre sur les recherches susdites ainsi que sur d'autres points d'Analyse pure et appliquée. J'assistai avec un plaisir particulier à une de ses leçons sur la Mécanique théorique. » Il quitte Berlin le 30 octobre 1852. Il reviendra assez souvent en Europe « occidentale » comme il précisait. Rencontrera-t-il à nouveau Dirichlet ? Y a-t-il eu échange épistolaire ? Il est certain, qu'au-delà de possibles échanges directs, des influences réciproques sont nées.

Au même moment, en automne 1852, Riemann, qui a été l'élève de Dirichlet à Berlin entre 1847 et 1849, écrit à son père pour se réjouir de la présence à Göttingen de Dirichlet : « L'autre matin, Dirichlet est resté avec moi deux heures. Il m'a remis des notes dont j'avais besoin pour mon épreuve ; cela m'a évité plusieurs heures de recherches laborieuses à la bibliothèque. Il a lu aussi toute ma thèse avec moi et a été fort aimable ; je ne m'y attendais pas, étant donné la grande différence de rang entre nous. »[19, pp. 8].

Riemann et Dirichlet deviendront confrères à l'Université de Gœttingen, lorsque Dirichlet succède à Gauss en 1855. Riemann – le timide et l'introverti – fréquentera les soirées mondaines organisées par les Dirichlet. Dirichlet avait épousé, en 1832, Rebecka Mendelssohn-Bartholdy, fille d'un grand banquier et sœur du compositeur Felix Mendelssohn. Les Dirichlet organisèrent à Gœttingen des soirées comme celles qu'ils organisaient à Berlin, ou que Dirichlet avait connues à Paris lors de son premier séjour entre 1822 et 1827, dans le cercle d'Alexander von Humboldt. Des soirées à mille lieux du « dîner de Sceaux », chez Cauchy, où l'on imagine aisément une ambiance confinée entre personnes aussi diamétralement opposées (malgré les mathématiques). Des soirées où l'on parle musique et, pour certains convives, mathématiques[20].

[19] St Pétersb. Mém. Savans Etrang., VI, 1851, pp. 141-158

[20] Françoise Tillard a publié récemment des lettres inédites de Fanny Hensel, la belle-sœur de Dirichlet. Ces lettres décrivent des soirées musicales berlinoises, auxquelles participent les Dirichlet. (Cf. Tillard, Françoise, Die verkannte Schwester. Die späte Entdeckung der Komponistin Fanny Mendelssohn Bartholdy, München, Kindler, 1994). Les « soirées de Göttingen » sont connues par certaines lettres de Dedekind dont on trouve quelques rares extraits dans [19, pp. 36-37].

Les « mains plus habiles » que Legendre attendait se sont levées et jointes en Allemagne dans les années 1850 : les mains de Dirichlet, les mains de Tchebichef et les mains de Riemann. Dans les papiers posthumes de Riemann, on trouve les articles de Tchebichef sur les nombres premiers, largement annotés. Ceux dans lesquels il revenait sur la « conjecture de Legendre ». Ceux à propos desquels Tchebichef voulait s'entretenir avec Dirichlet, fin octobre 1852.

La seconde partie de cet article abandonnera l'angle strictement historique pour jeter un regard croisé sur la démonstration du théorème de la progression arithmétique. Un regard croisé qui s'affranchira des contraintes historiques pour se nourrir d'apports multiples dont ceux de Tchebichef et de Lejeune-Dirichlet, bien sûr.

2 Variations mathématiques

Dans toute cette section, nous convenons de noter (a, b) le pgcd des entiers a et b.

2.1 Introduction – d'Euclide à Dirichlet

Vers -300 avant J.C., Euclide démontra, d'une manière fort astucieuse, l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Son argument repose essentiellement sur le fait que le plus petit facteur premier de l'entier $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ est $> p_n$.

Comme toujours en mathématiques, la question d'une éventuelle généralisation de ce résultat se pose de façon criante. Parmi les multiples directions possibles, peut-être l'une des plus simples est de se demander si l'ensemble des nombres premiers appartenant à une progression arithmétique donnée est infini. Plus précisément, donnons-nous deux entiers $a, q \geqslant 1$. L'ensemble des nombres premiers p vérifiant $p \equiv a \pmod q$ est-il infini ?

Remarquons tout d'abord que, si $d = (a, q) > 1$, alors la suite de terme général $u_n = qn + a$ est divisible par d. Ainsi, la condition $(a, q) = 1$ est-elle *nécessaire* au problème posé, ce que nous supposerons systématiquement dans la suite du texte. En 1837, le mathématicien allemand Dirichlet réussit le tour de force de montrer que cette condition était également *suffisante*, autrement dit :

Théorème 1 *Soient $a, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $(a, q) = 1$. Alors, il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv a \pmod q$.*

Il existe plusieurs façons de démontrer un tel résultat. La preuve originale de Dirichlet utilise des notions très fortes de théorie algébrique des nombres. Nous avons choisi de présenter une démonstration, due à Shapiro [17], n'utilisant que très peu de prérequis. Cela a l'avantage de pouvoir suivre le cheminement complet, mais nous ne pourrons éviter un anachronisme historique, puisque les inégalités de Tchebichef, postérieures à ce résultat, sont utilisées ici.

2.2 L'abandon des méthodes euclidiennes

L'idée d'Euclide, très séduisante, est à la fois simple et très efficace. Il est ainsi naturel de se demander si une adaptation de cette méthode au problème posé peut être possible. Prenons un exemple.

Proposition 1 *Il y a une infinité de nombres premiers p tels que* $p \equiv 3 \pmod 4$.

Démonstration Supposons le contraire, et notons $\mathcal{P}_{4,3} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ l'ensemble fini des nombres premiers p tels que $p \equiv 3 \pmod 4$. Soit l'entier $M = 4p_1p_2 \cdots p_n - 1$, que nous supposerons composé, sinon il n'y a rien à montrer. Il existe au moins un diviseur premier p de M de la forme $p \equiv 3 \pmod 4$ car, sinon, puisque M est impair, tous ses diviseurs premiers seraient de la forme $p \equiv 1 \pmod 4$ et M vérifierait alors $M \equiv 1 \pmod 4$, ce qui n'est manifestement pas le cas. D'autre part, on a $p \notin \mathcal{P}_{4,3}$, car, sinon, il diviserait $M + 1$. D'où la contradiction souhaitée. $\square$

Ainsi, l'argument d'Euclide se prête bien à cette progression arithmétique. On peut également l'utiliser pour les nombres premiers de la forme $p \equiv 1 \pmod 4$ bien que, dans ce cas, cela soit étrangement plus difficile. L'utilisation des *polynômes cyclotomiques*, bien connus en théorie algébrique des nombres, permet de généraliser aux nombres premiers de la forme $p \equiv 1 \pmod n$.

Malheureusement, on sait maintenant que les méthodes euclidiennes ne peuvent couvrir tous les cas. De façon plus précise, nous avons le curieux résultat suivant.

Théorème 2 *Soient* $a, q \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $(a, q) = 1$. *Il existe une preuve euclidienne pour les nombres premiers* $p \equiv a \pmod q$ *si et seulement si* $a^2 \equiv 1 \pmod q$.

Par exemple, l'argument d'Euclide peut être utilisé pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p de la forme $p \equiv 8 \pmod 9$ mais *ne peut pas* être utilisé pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p de la forme $p \equiv 7 \pmod 9$.

2.3 La méthode d'Euler

Au XVIII^e siècle, Euler avait envisagé une démonstration *analytique* du résultat d'Euclide, en montrant la divergence de la série $\sum_p 1/p$, où l'indice p signifie que la somme ne porte que sur les nombres premiers[21].

[21] Nous utiliserons cette convention dans le reste du texte.

L'idée de Dirichlet fut d'adapter cette méthode au problème posé. Il faut donc chercher à établir la divergence de la série

$$\sum_{p \equiv a \bmod q} \frac{1}{p},$$

où p décrit l'ensemble des nombres premiers tels que $p \equiv a \pmod q$, et ce en utilisant une fonction, notée disons $\mathbf{1}_{q,a}$, définie par

$$\mathbf{1}_{q,a}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv a \pmod q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et en estimant la somme

$$\sum_{p \leqslant N} \frac{\mathbf{1}_{q,a}(p)}{p},$$

où $N \geqslant 1$ est un entier grand.

Exemple 2 *($q = 4$ et $a = 1$) Dirichlet a utilisé la fonction définie pour n impair par*

$$\mathbf{1}_{4,1}(n) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

On vérifie immédiatement que, pour tout entier $n \geqslant 1$ impair, on a

$$\mathbf{1}_{4,1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier $N > 1$, on a

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv 1 \bmod 4}} \frac{1}{p} = \sum_{3 \leqslant p \leqslant N} \frac{\mathbf{1}_{4,1}(p)}{p} = \frac{1}{2} \sum_{3 \leqslant p \leqslant N} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{3 \leqslant p \leqslant N} \frac{\sin(\pi p/2)}{p}.$$

En vertu du calcul mené par Euler, la première somme tend vers $+\infty$ lorsque $N \to +\infty$. Dirichlet a alors démontré que la série

$$\sum_{p} \frac{\sin(\pi p/2)}{p}$$

convergeait, ce qui implique la divergence de la série

$$\sum_{p \equiv 1 \bmod 4} \frac{1}{p}.$$

2.4 Les caractères de Dirichlet

L'un des principaux problèmes de la méthode exposée ci-dessus est de construire explicitement les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{q,a}$. Ce fut l'une des grandes trouvailles de Dirichlet. Il mit au point ce que l'on appelle aujourd'hui les *caractères de Dirichlet*, que nous pouvons définir de la manière suivante :

Définition 1 *Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On appelle caractère de Dirichlet modulo q toute application $\chi : \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant les régles suivantes pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$:*

$$\begin{array}{lrcll} \text{(i)} & \chi(a) & = & \chi(a+kq) & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{(ii)} & \chi(ab) & = & \chi(a)\chi(b) & \\ \text{(iii)} & \chi(a) & = & 0 & \text{si } (a,q) > 1. \end{array}$$

On démontre que l'ensemble des caractères de Dirichlet modulo q muni du produit usuel est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ des unités de l'anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. En particulier, il y a $\varphi(q)$ caractères de Dirichlet modulo q, où φ désigne *l'indicateur d'Euler*. L'élément neutre de ce groupe s'appelle le caractère principal (ou trivial) de Dirichlet modulo q et se note habituellement χ_0. Ainsi, χ_0 est défini pour tout $a \in \mathbb{Z}$ par

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a,q) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on définit le caractère conjugué $\overline{\chi}$ de χ par $\overline{\chi}(a) = \overline{\chi(a)}$. Il est également facile de voir que, si $(a,q) = 1$, alors $\chi(a)$ est une racine $\varphi(q)$-ème de l'unité. En effet, si $\overline{a}$ désigne la classe de l'entier a dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, on a

$$(\chi(\overline{a}))^{\varphi(q)} = \chi\left(\overline{a}^{\varphi(q)}\right) = \chi\left(\overline{1}\right) = 1.$$

Dirichlet a pu établir qu'une combinaison linéaire adéquate de ces caractères fournit les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{q,a}$ cherchées. En effet, on a :

Théorème 3 *Soient $a, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\mathbf{1}_{q,a}(n) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a)\chi(n),$$

où la somme est étendue à tous les caractères de Dirichlet modulo q.

Ce résultat donne ainsi une expression des sommes partielles que l'on souhaite estimer.

Corollaire 1 *Soient $a, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et $N > 1$ entier. Alors on a*

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv a \bmod q}} \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{p \leqslant N \\ (p,q)=1}} \frac{1}{p} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(a) \sum_{p \leqslant N} \frac{\chi(p)}{p}.$$

Démonstration D'après le Théorème 3, on a

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv a \bmod q}} \frac{1}{p} = \sum_{p \leqslant N} \frac{\mathbf{1}_{q,a}(p)}{p} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{p \leqslant N} \frac{\chi(p)}{p}$$

et on sépare alors la première somme en deux selon que $\chi = \chi_0$ ou $\chi \neq \chi_0$, ce qui conduit au résultat souhaité en vertu de la définition de χ_0. $\square$

Il est facile de constater que la première somme du corollaire ci-dessus tend vers $+\infty$ lorsque $N \to +\infty$, puisqu'elle ne diffère de la somme $\sum_{p \leqslant N} 1/p$ que d'un nombre fini de termes. Le gros travail sera alors de démontrer que la série

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p}$$

converge lorque $\chi \neq \chi_0$, ce qui impliquera la divergence de la série

$$\sum_{p \equiv a \bmod q} \frac{1}{p}$$

et le Théorème 1 sera ainsi démontré.

2.5 Les fonctions L de Dirichlet

La propriété duale des relations d'orthogonalité des caractères de Dirichlet est la suivante.

Pour tout caractère de Dirichlet $\chi \neq \chi_0$ modulo q et tout ensemble E_q de q entiers consécutifs, on a

$$\sum_{n \in E_q} \chi(n) = 0.$$

La contrainte $\chi \neq \chi_0$ est bien sûr primordiale. Notons que, en vertu de la règle (iii), on peut se restreindre aux éléments de E_q premiers avec q. Cette égalité implique immédiatement l'inégalité suivante.

Pour tous entiers $N > M \geqslant 0$, on a

$$\left| \sum_{M < n \leqslant N} \chi(n) \right| \leqslant q. \tag{1}$$

On en déduit que, si $\chi \neq \chi_0$, la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

converge absolument pour tout réel $s > 0$ d'après la règle d'Abel.

Définition 2 *Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $\chi \neq \chi_0$ un caractère non principal de Dirichlet modulo q. Pour tout réel $s > 0$, on nomme fonction L de Dirichlet la somme de la série précédente de sorte que*

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Lorsque $\chi = \chi_0$, la série correspondante est absolument convergente pour tout $s > 1$.

La règle (ii) des caractères de Dirichlet signifie arithmétiquement que ces caractères sont des fonctions arithmétiques *complètement multiplicatives*. On en déduit que les fonctions L associées se factorisent en *produits eulériens*, tout comme la fonction zêta de Riemann. Ainsi, pour tout réel $s > 1$, on a

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

ce qui implique que ces fonctions ne s'annulent pas pour tout $s > 1$.

2.6 Le théorème de Dirichlet – une approche moderne

Fixons un entier $N \geqslant 1$ grand. Nous définissons aussi la *fonction de Von Mangold* Λ par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est utilisée dans la démonstration du théorème des nombres premiers en tant que « fonction-poids » dans les sommes de nombres premiers à estimer (Cf. [3]).

Rappelons quelques propriétés essentielles relatives à Λ.

Proposition 2

(i) *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln(n/d),$$

où μ désigne la fonction de Möbius.

(ii) (Inégalité de Tchebichef). *Pour tout $N \geqslant 2$ entier, on a*[22]

$$\sum_{n \leqslant N} \Lambda(n) \leqslant 7N.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 4 *Si $\chi \neq \chi_0$ est un caractère* non principal *de Dirichlet modulo q vérifiant $L(1,\chi) \neq 0$, alors la série $\sum_p \chi(p)/p$ converge.*

Démonstration L'idée est de calculer de deux façons différentes la somme

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n}.$$

[22] On connaît aujourd'hui de bien meilleures majorations mais cela ne nous est pas utile dans la suite de ce travail.

▷ **Etape 1**. D'après la Proposition 2 (i) on a

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} = \sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n)}{n} \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

On intervertit alors les sommations (technique de calcul très souvent utilisée en arithmétique)

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} = \sum_{d \leqslant N} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \leqslant N \\ d|n}} \frac{\chi(n)}{n},$$

et le changement $n = kd$ dans la somme intérieure fournit

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} = \sum_{d \leqslant N} \Lambda(d) \sum_{k \leqslant N/d} \frac{\chi(kd)}{kd}.$$

D'après la complète multiplicativité des caractères de Dirichlet[23], nous pouvons écrire que

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} = \sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} \sum_{k \leqslant N/d} \frac{\chi(k)}{k}.$$

Le but maintenant est de faire intervenir la somme

$$L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$$

parfaitement définie puisque $\chi \neq \chi_0$. En séparant la somme intérieure en deux, il vient

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} = L(1, \chi) \sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} - \sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} \sum_{k > N/d} \frac{\chi(k)}{k}.$$

Par hypothèse, nous avons

$$L(1, \chi) \neq 0, \tag{2}$$

ce qui implique que

$$\sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} = \frac{1}{L(1, \chi)} \left\{ \sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} + \sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} \sum_{k > N/d} \frac{\chi(k)}{k} \right\}. \tag{3}$$

Occupons-nous de la seconde somme. Une sommation partielle permet d'obtenir

$$\sum_{k > N/d} \frac{\chi(k)}{k} = -\frac{d}{N} \sum_{k \leqslant N/d} \chi(k) + \int_{N/d}^{\infty} t^{-2} \left(\sum_{k \leqslant t} \chi(k) \right) \mathrm{d}t$$

et (1) permet d'en déduire que

$$\left| \sum_{k > N/d} \frac{\chi(k)}{k} \right| \leqslant q \left(\frac{d}{N} + \int_{N/d}^{\infty} t^{-2} \mathrm{d}t \right) = \frac{2qd}{N}.$$

[23] règle (ii) de la Définition 1.

Ainsi, puisque $|\chi(n)| \leqslant 1$, nous avons finalement obtenu

$$\left| \sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} \sum_{k > N/d} \frac{\chi(k)}{k} \right| \leqslant \frac{2q}{N} \sum_{d \leqslant N} \Lambda(d),$$

et la Proposition 2 (ii) implique que

$$\left| \sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} \sum_{k > N/d} \frac{\chi(k)}{k} \right| \leqslant 14q \, .$$

En réinjectant cette majoration dans (3), on en déduit que

$$\left| \sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} \right| \leqslant \frac{1}{|L(1,\chi)|} \left(\left| \sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} \right| + 14q \right). \tag{4}$$

▷ **Etape 2**. Effectuons de nouveau une sommation partielle. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} &= \frac{\chi(2) \ln 2}{2} + \sum_{3 \leqslant n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} \\ &= \frac{\chi(2) \ln 2}{2} + \frac{\ln N}{N} \sum_{3 \leqslant n \leqslant N} \chi(n) + \int_3^N \frac{\ln t - 1}{t^2} \left(\sum_{3 \leqslant n \leqslant t} \chi(n) \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

et, en faisant de nouveau appel à (1), on en déduit que

$$\left| \sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n) \ln n}{n} \right| \leqslant \frac{\ln 2}{2} + q \left(\frac{\ln N}{N} + \int_3^N \frac{\ln t - 1}{t^2} \mathrm{d}t \right) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{q \ln 3}{3} \leqslant q.$$

En reportant cette estimation dans (4), on en déduit que

$$\left| \sum_{d \leqslant N} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} \right| \leqslant \frac{15q}{|L(1,\chi)|} \, . \tag{5}$$

▷ **Etape 3**. Une nouvelle sommation partielle entraîne que

$$\begin{aligned} \sum_{p \leqslant N} \frac{\chi(p)}{p} &= \sum_{p \leqslant N} \left(\frac{1}{\ln p} \times \frac{\chi(p) \ln p}{p} \right) \\ &= \frac{1}{\ln N} \sum_{p \leqslant N} \frac{\chi(p) \ln p}{p} + \int_2^N \frac{1}{t (\ln t)^2} \left(\sum_{p \leqslant t} \frac{\chi(p) \ln p}{p} \right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or, d'après la définition de la fonction Λ, on a pour tout $t \in [2, N]$

$$\sum_{p \leqslant t} \frac{\chi(p) \ln p}{p} = \sum_{d \leqslant t} \frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} - \sum_{p \leqslant t} \ln p \sum_{\alpha=2}^{[\ln t / \ln p]} \frac{\chi(p^\alpha)}{p^\alpha},$$

où $[x]$ est la partie entière du réel x. La seconde somme est bornée en vertu des inégalités

$$\left|\sum_{p\leqslant t}\ln p\sum_{\alpha=2}^{[\ln t/\ln p]}\frac{\chi(p^\alpha)}{p^\alpha}\right|\leqslant\sum_{p\leqslant t}\ln p\sum_{\alpha=2}^{[\ln t/\ln p]}\frac{1}{p^\alpha}\leqslant\sum_{p}\frac{\ln p}{p(p-1)}\leqslant 1.$$

Ainsi

$$\sum_{p\leqslant t}\frac{\chi(p)\ln p}{p}=\sum_{d\leqslant t}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}+R(t)$$

où $|R\,(t)|\leqslant 1$, et donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p\leqslant N}\frac{\chi(p)}{p}\right|\leqslant\frac{1}{\ln N}&\left(\left|\sum_{d\leqslant N}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\right|+|R(N)|\right)\\&+\int_2^N\frac{1}{t(\ln t)^2}\left(\left|\sum_{d\leqslant t}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\right|+|R(t)|\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et l'estimation (5) fournit

$$\left|\sum_{p\leqslant N}\frac{\chi(p)}{p}\right|\leqslant\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{15q}{|L(1,\chi)|}+1\right),$$

ce qui achève la démonstration. □

Ainsi le Théorème 1 est démontré si l'on réussit à établir (2).

2.7 La non-annulation de $L\,(1,\chi)$ pour les caractères réels non principaux

La démonstration de (2) est le point délicat de la preuve du Théorème 1. L'idée de Dirichlet fut d'établir, puis d'utiliser un résultat d'importance fondamentale en théorie algébrique des nombres : la *formule du nombre de classes* pour les corps quadratiques. D'autres preuves existent utilisant l'analyse complexe.

La démonstration que nous présentons est élémentaire, en ce sens qu'elle n'utilise pas l'analyse complexe. Tout d'abord, faisons une première remarque intéressante. Il est relativement aisé de montrer que, pour tout caractère χ modulo q et tout entier $N\geqslant 1$, on a

$$\sum_{n\leqslant N}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}=E(\chi)\ln N+O(1),$$

où l'on a posé

$$E(\chi)=\begin{cases}\ \ 1 & \text{si } \chi=\chi_0\\ -1 & \text{si } \chi\neq\chi_0 \text{ et } L(1,\chi)=0\\ \ \ 0 & \text{si } \chi\neq\chi_0 \text{ et } L(1,\chi)\neq 0.\end{cases}$$

Soient alors $a, q \geqslant 1$ entiers premiers entre eux. D'après le Théorème 3, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv a \bmod q}} \frac{\Lambda(n)}{n} &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{n \leqslant N} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} \\ &= \frac{\ln N}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) E(\chi) + O(1)\end{aligned}$$

puis, en faisant $a = 1$, on obtient

$$\frac{\ln N}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} E(\chi) + O(1) = \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv 1 \bmod q}} \frac{\Lambda(n)}{n} \geqslant 0,$$

ce qui implique que

$$0 \leqslant \sum_{\chi \bmod q} E(\chi) = 1 - \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ L(1,\chi)=0}} 1,$$

d'où l'on déduit qu'il y a au plus un caractère non principal modulo q vérifiant $L(1, \chi) = 0$. Puisque

$$L(1, \overline{\chi}) = \overline{L(1, \chi)},$$

ce caractère est nécessairement *réel*, c'est-à-dire χ vérifiant $\chi^2 = \chi_0$.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la démonstration du théorème de Dirichlet. Les lignes qui vont suivre empruntent leurs idées à Monsky [15]. Elles reposent sur l'utilisation de la *série de Lambert* associée à un caractère réel de Dirichlet modulo q.

Théorème 5 *Soit $\chi \neq \chi_0$ un caractère réel de Dirichlet modulo q. Alors $L(1, \chi) \neq 0$.*

Démonstration On pose

$$\nu(n) = \sum_{d \mid n} \chi(d)$$

et on considère la série de Lambert $t \longmapsto f(t)$ associée à χ définie pour tout $t \in [0, 1[$ par

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) t^n}{1 - t^n}.$$

Par multiplicativité, on vérifie que $\nu(n) \geqslant 0$ et que $\nu\left(n^2\right) \geqslant 1$. On en déduit en particulier que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(n) = \infty.$$

D'après [16, Theorem VIII-65], on a

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(n) t^n$$

et donc $f(t) \longrightarrow \infty$ lorsque $t \longrightarrow 1^-$. Supposons maintenant que $L(1,\chi) = 0$. Alors

$$-f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left(\frac{1}{n(1-t)} - \frac{t^n}{1-t^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n).$$

Observons que

$$\begin{aligned}(1-t)(a_n - a_{n+1}) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{t^n}{1+\cdots+t^{n-1}} + \frac{t^{n+1}}{1+\cdots+t^n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{t^n}{(1+\cdots+t^{n-1})(1+\cdots+t^n)},\end{aligned}$$

et l'inégalité arithmético-géométrique entraîne que, pour tout $0 \leqslant t < 1$, on a

$$\sum_{j=0}^{n-1} t^j \geqslant n \prod_{j=0}^{n-1} t^{j/n} = nt^{(n-1)/2} \geqslant nt^{n/2}$$

et

$$\sum_{j=0}^{n} t^j \geqslant (n+1)t^{n/2},$$

de sorte que

$$(1-t)(a_n - a_{n+1}) \geqslant \frac{1}{n(n+1)} - \frac{t^n}{n(n+1)t^n} = 0$$

et donc la suite (a_n) est décroissante et tend vers 0. D'après (1), on a

$$|-f(t)| \leqslant (2q+1)a_1 = 2q+1,$$

ce qui est impossible puisque f est non bornée sur $[0,1[$. □

Remarque. Le lecteur ayant des connaissances en théorie algébrique des nombres aura reconnu la fonction ν apparaissant dans la preuve ci-dessus. En effet, si $\mathbb{K}$ est le corps quadratique réel de discriminant q dont on note $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ l'anneau des entiers algébriques, alors $\nu(n)$ compte le nombre d'idéaux entiers non nuls de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ de norme égale à n. Ainsi, l'inégalité $\nu(n) \geqslant 0$ est évidente. De plus, par des techniques empruntées à l'analyse complexe, on peut montrer[24] que pour $x \geqslant q^{1/2}$ suffisamment grand, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \leqslant x} \nu(n) = x\, L(1,\chi) + O_{\varepsilon}\left((qx)^{1/3} x^{\varepsilon} \right),$$

ce qui implique en particulier la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \nu(n)$.

Remerciements Nous tenons à remercier chaleureusement les rapporteurs pour leur relecture attentive du manuscrit et leurs suggestions avisées qui ont permis une nette amélioration du texte initial. Nous remercions également Mme Marie-Jane Haguel pour sa très grande disponibilité.

[24]Landau fut le premier, en 1917, à établir une estimation de ce type valable pour n'importe quel corps de nombres, en utilisant les formules de sommation de Perron que l'on prend classiquement pour étudier les ordres moyens des fonctions arithmétiques usuelles. Toutefois, la précision du terme d'erreur dans la formule présentée ici provient d'un théorème plus récent démontré par Friedlander & Iwaniec en 2005 [4]. On notera les similitudes entre la fonction ν et la fonction τ qui compte le nombre de diviseurs d'un entier.

Références

[1] Belhoste, B. (1982). *Augustin-Louis Cauchy et la pratique des sciences exactes en France au XIX^e siècle.* Thèse, Paris.

[2] Belhoste, B. et Lützen, J. (1984). Joseph Liouville et le collège de France. *Rev. Hist. Sci,* XXXVII / 3-4, 255–304.

[3] Bordellès, O. et Verdier, N. (2009). Variations autour du postulat de Bertrand. *Bulletin AMQ*, vol. XLIX, no. 2, mai 2009, 25–51.

[4] Friedlander J. B. et Iwaniec, H. (2005). Summation Formulae for Coefficients of L-Functions. *Canad. J. Math.* **57**(3), 494–505.

[5] Jongmans, F. (1981). Quelques pièces choisies dans la correspondance d'Eugène Catalan. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 50^e année, Tome L, 287–298.

[6] Jongmans, F. (1996). *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, Républicain sans république.* Société belge des professeurs de mathématique d'expression française.

[7] Legendre, A. M. (1785). Recherches d'analyse indéterminée. *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie*, Paris, 1699–1790.

[8] Legendre, A. M. (an 6, 1797 ou 1798). *Essai sur la théorie des nombres.* Première édition, Chez Duprat, Paris.

[9] Legendre, A. M. (1808). *Essai sur la théorie des nombres.* Seconde édition, Éd. Courcier, Paris, 399–406.

[10] Lejeune-Dirichlet, J. P. G. (1837). Ueber den Satz : dass jede arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz keinen gemeinschaftlichen Factor haben, unendlich viel Primzählen enthält. Berlin, *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 108–110.

[11] Lejeune-Dirichlet, J. P. G. (1837). Abhandlungen der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (Berlin : *Königl. Akad. d. Wiss.*, 1839), *Mathematische Abhandlungen*, 45–81.

[12] Lejeune-Dirichlet, J. P. G. (1839). Démonstration de cette proposition : Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des entiers sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Série I, tome 4, 393–422.

[13] Lejeune-Dirichlet, J. P. G. (1840). Extrait d'une lettre à M.Liouville. (Sur la théorie des nombres). Paris, *Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences*, Tome X, 285–288 & *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Série 1, Tome 5, 72–74.

[14] Markoff, A. A. et Sonin, N. (dir.), (1962). *Œuvres de P. L. Tchebychef.* Tome II, Chelsea Publishing Company, New York, VII–XVIII (paru initialement en russe).

[15] Monsky, P. (1993). Simplifying the Proof of Dirichlet's Theorem. *Amer. Math. Monthly* 100, 861–862.

[16] Pólya, G. et Szegő, G. (1998). *Problems and Theorems in Analysis II.* Springer.

[17] Shapiro, H. N.. (1950). On primes in arithmetic progressions (II). *Annals of Math.* 52, 231–243.

[18] Tannery, J. (1908). Correspondance entre Liouville et Dirichlet. *Bulletin des sciences mathématiques*, deuxième série, Volume 32, 47–62 et 88–95[25].

[19] Tazzioli, R. (2002). *Riemann, le géomètre de la nature.* Ed. Belin.

[20] Verdier, N. (2009). *Le journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885).* Thèse de doctorat de l'Université Paris-Sud 11.

[25] La correspondance est poursuivie dans *Bulletin des sciences mathématiques*, deuxième série, volume, 33, 47–64. Il y aura une réimpression de l'ensemble chez Gauthier-Villars en 1910.