Énigmes et jeux mathématiques

Frédéric Gourdeau,
Département de mathématiques et de statistique,
Université Laval

Je me suis laissé porter par la lecture d'un classique : Martin Gardner, *Entertaining Mathematical Puzzles*, Dover 1986, un livre dont le titre original est *Mathematical Puzzles* (publié en 1961 chez Crowell). Des trois problèmes que je vous propose, deux proviennent en effet de ce livre. S'ajoute à cela un premier problème, intriguant et accessible. En fait, les trois problèmes de cette semaine sont accessibles à tous, et leurs solutions s'expliquent simplement – ce qui ne veut pas dire qu'ils sont faciles.

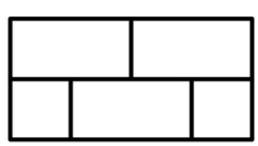
Un tour de magie… ou presque Vous avez les yeux bandés. On vous remet un paquet de cartes en vous disant que 12 cartes sont tournées face vers le haut et que les 40 autres cartes sont tournées face vers le bas. Ces cartes sont mélangées.

Votre tâche : sans retirer votre bandeau et en utilisant toutes les cartes, former exactement deux piles de cartes de telle manière que chacune ait le même nombre de cartes tournées face vers le haut.

Jeu de Nim en cercle Voici un petit jeu pour deux joueurs. On place dix jetons de manière à ce qu'ils forment un cercle. À tour de rôle, chaque joueur enlève soit un jeton, soit deux jetons qui doivent alors être adjacents (i.e. qu'il ne peut y avoir de trou qui sépare ces deux jetons). Le joueur qui enlève le dernier jeton gagne.

Voilà. Maintenant, la question : si les deux joueurs jouent parfaitement, lequel gagne ?

Les cinq briques Pouvez-vous reproduire le dessin ci-dessous en trois traits de crayon sans repasser sur un trait ? Les traits peuvent se croiser mais il ne doit pas y avoir de segment que l'on trace deux fois. Si vous croyez que cela n'est pas possible, pouvez-vous expliquer pourquoi ?



Solutions des problèmes du numéro de mai 2011

1- Les 9 pièces d'or On a 8 pièces d'or et une fausse pièce. Rien ne les distingue si ce n'est que la fausse pièce est un peu plus lourde que les vraies. À l'aide d'une balance à fléau, déterminer en au plus trois pesées quelle est la fausse pièce. Pouvez-vous trouver une méthode qui fonctionne toujours en au plus deux pesées ?

Solution. On sépare nos pièces en trois groupes de trois pièces. On compare deux de ces groupes en plaçant trois pièces sur chacun des plateaux : si la balance indique qu'un plateau est plus lourd, on sait que la fausse pièce s'y trouve. Sinon, on sait que la pièce est parmi les trois pièces qui ne sont pas sur la balance. On sait donc de toute façon dans quel groupe de trois pièces se retrouve la pièce la plus lourde. Il suffit alors de comparer deux des pièces de ce groupe : ou bien l'une est plus lourde, et on a terminé, ou bien ces deux pièces ont le même poids, et on a aussi terminé puisque la pièce la plus lourde est celle qui n'est pas sur un des plateaux !

2- Les 12 pièces d'or On a maintenant 11 pièces d'or et une fausse pièce. Rien ne les distingue si ce n'est leur poids mais on ne sait pas si la fausse pièce est plus lourde ou plus légère que les vraies pièces. À l'aide d'une balance à fléau, déterminer en au plus quatre pesées quelle est la fausse pièce. Pouvez-vous trouver une méthode qui fonctionne en trois pesées ?

Solution. Ce problème est plus difficile. Débutons en comparant deux groupes de 4 pièces.

PREMIER CAS : la balance indique qu'un plateau est plus léger que l'autre. Convenons que le plateau sur lequel on a les pièces A_1, A_2, A_3 et A_4 est plus léger que le plateau sur lequel on a les pièces B_1, B_2, B_3 et B_4. On sait donc que les autres pièces (que l'on nomme C_1, C_2, C_3 et C_4) ne sont pas fausses. Comparons alors A_1, A_2, B_3 et B_4 avec B_1, A_3, C_1 et C_2.

- Si le premier groupe est plus léger, alors la fausse pièce est l'une de A_1, A_2, ou B_1 : on compare alors A_1 et B_1 (ensemble sur un plateau) avec C_1 et C_2 et, selon le résultat, on sait quelle pièce est fausse.
- Si le deuxième groupe est plus léger, alors la fausse pièce est l'une de B_3, B_4 ou A_3 : on compare alors A_3 et B_3 (ensemble sur un plateau) avec C_1 et C_2 et, selon le résultat, on sait quelle pièce est fausse.
- Si les plateaux sont en équilibre, la fausse pièce est A_4 ou B_4 et il suffit de comparer l'une d'elle à une pièce honnête pour avoir terminé.

SECOND CAS : la balance indique que les deux plateaux ont le même poids. La fausse pièce est donc une des pièces qui n'est pas sur la balance : convenons de nommer ces pièces C_1, C_2, C_3 et C_4. Comparons alors C_1 et C_2 (ensemble) à C_3 et une des autres pièces. Il y a trois cas.

- Si le premier groupe est plus léger, alors soit C_1 ou C_2 est plus légère, soit C_3 est plus lourde : on compare alors C_1 et C_3 (ensemble sur un plateau) avec deux pièces honnêtes. Selon le résultat, on sait quelle pièce est fausse.
- Si le deuxième groupe est plus léger, alors soit C_1 ou C_2 est plus lourd, soit C_3 est plus légère : on compare alors C_1 et C_3 (ensemble sur un plateau) avec deux pièces honnêtes. Selon le résultat, on sait quelle pièce est fausse.
- Si les plateaux sont en équilibre, la fausse pièce est C_4 : on ne sait pas si elle est plus lourde ou plus légère, mais ce n'est pas demandé.

3- Brûler pour 45 minutes Vous avez deux cordes qui brûlent chacune en exactement une heure. De plus, les cordes ne sont pas homogènes et on ne peut donc pas dire que deux morceaux de même longueur brûlent nécessairement dans le même temps. Comment faire pour mesurer, à l'aide des cordes, exactement 45 minutes ? Notez bien que comme dans tous les problèmes de cette nature, on suppose qu'allumer une corde ne prend aucun temps, et ainsi de suite pour toute autre manipulation raisonnable.

Solution. On allume en même temps deux extrémités d'une corde et une extrémité de l'autre. Lorsque la corde dont on a allumé les deux extrémités est entièrement consumée, il y a 30 minutes écoulées. Si on parvient à ce moment à allumer la deuxième extrémité de l'autre corde, elle finira de se consumer en 15 minutes.