Énigmes et jeux mathématiques

Frédéric Gourdeau,
Département de mathématiques et de statistique,
Université Laval

Les problèmes de cette chronique sont des variantes de problèmes attribués à Sam Loyd. Je me suis basé sur le livre *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, édité par Martin Gardner, en reformulant toutefois les questions. La première est une version particulièrement compliquée d'un problème d'un genre classique.

Quel est l'âge de Marie ? Marie et Anne ont ensemble 44 ans. De plus, Marie a deux fois l'âge qu'Anne avait lorsque Marie avait la moitié de l'âge qu'Anne aura lorsqu'elle aura trois fois l'âge que Marie avait lorsque Marie avait trois fois l'âge d'Anne. Quel est donc l'âge de Marie ?

Quelle est la largeur du fleuve ? Deux traversiers partent de part et d'autre d'un fleuve. Ils ne vont pas à la même vitesse : ils se croisent donc plus près d'une rive que de l'autre, et en fait à 720 mètres de la rive la plus proche. Ils poursuivent leur route, arrêtent chacun trente minutes à quai avant de repartir, et se croisent à nouveau mais, cette fois-ci, à 400 mètres de l'autre rive. Quelle est la largeur du fleuve ?

À première vue, on peut sembler manquer d'information mais, en fait, on a tout ce qui faut pour répondre. La solution peut même être très simple, et en fait être expliquée sans même utiliser d'algèbre. (Évidemment, on suppose ici que les traversiers se déplacent chacun à vitesse constante et on ne tient pas compte du temps pour accélérer ou ralentir.)

Pouvez-vous bien mesurer ? Vous avez deux cruches bien pleines, chacune contenant douze litres de vin. Vous disposez de deux contenants vides d'une capacité de 4 et 5 litres respectivement. Pouvez-vous trouver comment obtenir exactement 2 litres de vin dans chacun de vos deux contenants, sans perdre de vin et sans utiliser d'autres contenants ?

Solutions des problèmes du dernier numéro

1- Un grand malade Un homme prend 48 pilules en 30 jours, en prenant au moins une pilule à chaque jour. Montrer qu'on peut toujours trouver une suite de jours consécutifs pendant lesquels il prend en tout exactement 10 pilules. Peut-on trouver une suite de jours pendant lesquels il prend exactement 12 pilules ?

SOLUTION. Soit P_i, $i = 1, 2, \ldots, 30$, la quantité de pilules prises après i jours. On a donc

$$(*) \qquad 1 \leq P_1 < P_2 < \ldots < P_{30} = 48.$$

On cherche une suite de jours pendant lesquels il a pris 10 pilules : on cherche donc deux journées j et k telles que $P_k - P_j = 10$, i.e. $P_k = P_j + 10$. Considérons les $P_i + 10$. On a

$$(**) \qquad 1 < P_1 + 10 < P_2 + 10 < \ldots < P_{30} + 10 \leq 58.$$

Ainsi les nombres $P_1, \ldots, P_{30}, P_1 + 10, \ldots, P_{30} + 10$ représentent 60 entiers compris entre 1 et 58 : il y en a donc au moins deux qui sont égaux ! (Il y en a en fait au moins deux paires d'entiers égaux.) Puisque ces deux entiers ne peuvent pas provenir tous deux de $(*)$ ou tous deux de $(**)$, il existe donc bien j et k tels que tels que $P_k = P_j + 10$, ce qu'on voulait montrer.

Lorsque l'on se penche sur la deuxième partie de la question, il faut être un peu plus précis. On considère la suite des $P_i + 12$ et on a

$$(***) \qquad 1 < P_1 + 12 < P_2 + 12 < \ldots < P_{30} + 12 \leq 60.$$

Les nombres $P_1, \ldots, P_{30}, P_1 + 12, \ldots, P_{30} + 12$ représentent alors 60 entiers compris entre 1 et 60 : si un de ces entiers est 12, on a terminé ! Sinon, il n'y a que 59 valeurs disponibles et il y a 60 entiers : donc au moins deux sont égaux et on a aussi terminé. C'est donc toujours aussi possible pour 12 pilules.

Que se passe-t-il si on pose la même question pour davantage de pilules ? Quel est le nombre maximal que l'on peut demander pour avoir une réponse positive ?

2- Des nombres premiers avec des 0 et des 1 Considérer la suite

$$1, 10, 101, 1010, 10101, \ldots$$

Quels sont les nombres premiers qui appartiennent à cette suite ?

SOLUTION. Les nombres de cette suite se terminant par 0 ne sont pas premiers puisqu'ils se divisent par 10 et ont donc au moins 2 et 5 comme facteurs. Examinons maintenant les nombres de la suite qui se terminent par 1. Le premier de ces nombres, c'est-à-dire 1, est un cas un peu spécial, puisqu'on considère 1 comme n'étant ni premier, ni composé. Par ailleurs, on vérifie facilement que 101 est un nombre premier.

Pour 10101, on a

$$11 \times 10101 = 111111 = 111 \times 1001.$$

Comme 11 est un diviseur de 1001, on voit que 111 est un diviseur de 10101. Pour 1010101, on obtient de la même manière

$$11 \times 1010101 = 11111111 = 1111 \times 10001.$$

Ici, comme 11 divise 1111, on voit que 10001 doit diviser 1010101.

En général, cette méthode fonctionne toujours. Soit N un nombre de cette suite qui se termine par 1 et qui est écrit en utilisant n fois le chiffre 1 : alors $11 \times N$ est constitué de $2n$ «1» consécutifs et, comme précédemment, on a toujours

$$11 \times N = B \times C,$$

où B est formé de n «1» consécutifs (c'est-à-dire $B = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10^1 + 10^0$) et $C = 10^n + 1$. Puisque 11 est premier, forcément l'un de B ou de C doit diviser N. Le seul cas particulier est lorsque $C = N$, c'est-à-dire lorsque $N = 101$: heureusement, car dans ce cas, on a bien un nombre premier.

3- Dérivée centenaire Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Trouver une manière simple de calculer $f^{(100)}(x)$, i.e. la dérivée centième de $f(x)$.

Solution. On écrit, à l'aide de la méthode de décomposition en fractions partielles,

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

En dérivant une première et une deuxième fois, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{-1}{(1+x)^2}\right) \\ f''(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3} + \frac{(-1)\cdot(-2)}{(1+x)^3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2!}{(1-x)^3} + \frac{2!}{(1+x)^3}\right). \end{aligned}$$

En répétant le procédé, on obtient

$$f^{(100)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{100!}{(1-x)^{101}} + \frac{100!}{(1+x)^{101}}\right).$$