Mathématiques et civilisation

Loi des cosinus ou Théorème d'Al-Kashi ?

Vincent Papillon,
Collège Jean-de-Brébeuf

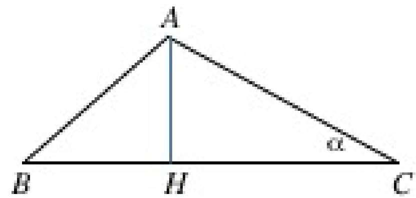
Connaissez-vous *Ghiyath al-din Jamshid Kashani* ? Non ? Alors, peut-être le connaissez-vous sous le nom de *Al-Kashi* ? Non plus ? Donc vous ne savez rien du théorème d'Al-Kashi ! ? ! Ne vous en faites pas. Moi non plus, je ne le connaissais pas il y a à peine quelques semaines. Heureusement, nous avons un bon alibi vous et moi : nous ne sommes ni iraniens, ni arabes, ni français. Et puis, jamais les livres de mathématiques nord-américains dans lesquels nous avons étudié n'ont même mentionné un quelconque théorème d'Al-Kashi. La télévision iranienne a pourtant diffusé en 2009 une télésérie sur la vie et l'œuvre de ce mathématicien et astronome d'origine perse né en 1380 à Kashan (d'où le nom d'Al-Kashi), en Iran, et mort en 1429 à Samarkand, en Ouzbékistan. La série s'intitule *Échelle sur le ciel*, traduction française approximative du titre d'un traité d'astronomie d'Al-Kashi, paru en arabe vers 1407. Mais bon, ce n'est pas tous les jours qu'on regarde la télévision iranienne. . .

Kashan (Iran) (photo : François Denis Fievez)

Si je vous parle d'Al-Kashi, c'est que, en furetant sur Internet, j'ai découvert qu'en France la *Loi des cosinus* est disparue et qu'on y trouve en lieu et place le *Théorème d'Al-Kashi*. Ce changement d'appellation dans les manuels français daterait des années 1980-90. Pour l'instant, la France est le seul pays occidental qui utilise cette appellation au lieu de *Loi des cosinus* ou encore *Théorème de Pythagore généralisé*. Il y a d'ailleurs un débat intéressant à ce sujet sur le site de discussion de Wikipédia, à la rubrique *Théorème d'Al-Kashi*.

Ce qu'on peut retenir de tout ce qui est écrit à propos de la paternité de la loi des cosinus, c'est qu'elle remonte à Euclide (ou à son école d'Alexandrie) qui l'aurait formulée et démontrée dans le *Livre II* sous une forme non trigonométrique, comme généralisation du fameux théorème de Pythagore. Voici cette formulation de la loi des cosinus attribuée à Euclide :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{HC} \cdot \overline{BC}$$



On reconnaît la loi des cosinus en remplaçant $\overline{HC}$ par sa valeur en fonction de $\overline{AC}$ et de α : $\overline{HC} = \overline{AC} cos\alpha$. La démonstration d'Euclide est basée sur des calculs d'aire et sur des applications répétées du théorème de Pythagore. En voici la traduction en termes plus ou moins algébriques :

$$\begin{aligned}
\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{BH}^2, \\
&= (\overline{BC} - \overline{HC})^2 + \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2, \\
&= \overline{BC}^2 + \overline{HC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{HC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{HC}^2, \\
&= \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{HC}.
\end{aligned}$$

Apparemment, ce serait Al-Kashi qui serait le premier auteur connu à avoir écrit la loi des cosinus dans une formulation « moderne » (dans la notation de Viète) et à avoir écrit une démonstration dans un texte authentifié (XV^{e} siècle).

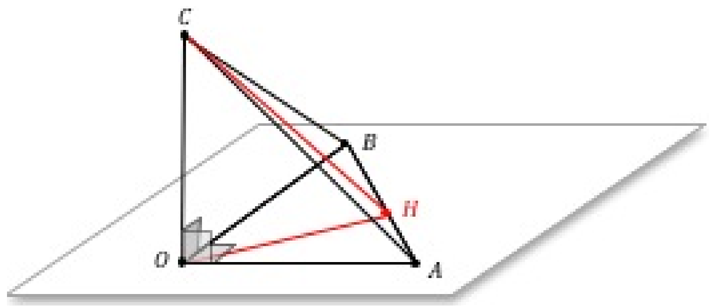
On trouve aujourd'hui de nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore [1] et de la loi des cosinus. De plus, le théorème de Pythagore se généralise facilement, dans l'espace tridimensionnel euclidien, aux tétraèdres rectangles (tétraèdres dont un sommet est pourvu de trois angles droits), sous la forme suivante : *le carré de l'aire de la face opposée au sommet trirectangulaire est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces*. Ce résultat était connu de Descartes, et on peut le démontrer de plusieurs façons. En voici une démonstration simple, sans calcul vectoriel.

Supposons que le tétraèdre $OABC$ soit trirectangulaire en son sommet O (figure) et supposons que le point H soit le point d'intersection de l'arête AB avec le plan qui contient l'arête OC et qui est perpendiculaire à AB. Alors, on aura simultanément $OH \perp AB$ et $CH \perp AB$. Le carré de l'aire de la face hypoténuse ABC est $\overline{AB}^2 \cdot \overline{HC}^2$. En appliquant successivement le théorème de Pythagore (version 2-D) dans les triangles OAB, OHC puis OAB, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{AB}^2 \cdot \overline{HC}^2 &= (\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2) \cdot (\overline{OC}^2 + \overline{OH}^2) \\
&= \overline{OA}^2 \cdot \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 \cdot \overline{OC}^2 + (\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2) \cdot \overline{OH}^2 \\
&= \overline{OA}^2 \cdot \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 \cdot \overline{OC}^2 + \overline{AB}^2 \cdot \overline{OH}^2.
\end{aligned}$$

[1] Voir par exemple l'article *Sommes à la sauce pythagoricienne* de Bernard Hodgson dans la revue *Accromath*.[2]

Il s'ensuit que $\left(\frac{\overline{AB}\cdot\overline{HC}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OC}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AB}\cdot\overline{OH}}{2}\right)^2$, c.q.f.d.



Comme le théorème de Pythagore se généralise aux tétraèdres rectangles, on peut se demander si la loi des cosinus (Théorème d'Al-Kashi) se généralise semblablement aux tétraèdres quelconques. La réponse est oui, mais, curieusement, la formulation de cette généralisation ainsi que sa démonstration, pourtant fort simples, ne sont que relativement récentes. Sur le site *Mathworld* de Wolfram.com, à la rubrique *Law of Cosines*, on trouve une généralisation de la loi des cosinus ainsi qu'un bon aperçu d'une démonstration du Coréen J. R. Lee [3] parue en 1997. Selon Wolfram, on peut remonter jusqu'à un manuel de mathématiques français édité en 1905 pour trouver une trace écrite d'une proposition plus ou moins équivalente à la loi des cosinus dans un tétraèdre [1]. Voici la formulation de la loi des cosinus dans un tétraèdre :

Si on désigne par S_i l'aire de la face i d'un tétraèdre quelconque ($i = 1,\ 2, 3, 4$), et par θ_{ij} l'angle dièdre entre les faces i et j, alors,

$$S_i^2 = \sum_{j\neq i} S_j^2 - 2 \sum_{j,k\neq i, j\neq k} S_j S_k cos\theta_{jk}.$$

On trouvera deux démonstrations de cette loi des cosinus généralisée aux tétraèdres dans une prochaine *Note mathématique* de ce Bulletin, de même que d'autres commentaires mathématiques et d'autres généralisations. Alors, *Loi des cosinus* ou *Théorème d'Al-Kashi*? Voilà une question sans réponse, qui peut tout au plus faire un titre de chronique...

Références

[1] Dostor, G. (1905). *Éléments de la théorie des déterminants, avec application à l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et l'espace, 2ème éd.*, Paris, Gauthier-Villars, pp. 252-293. Consulté le 4 février 2011 sur : http ://books.google.ca.

[2] Hodgson, Bernard R. (2010) . Sommes à la sauce pythagoricienne. *Accromath, 5* (été-automne), 22–29 http ://accromath.uqam.ca/contents/pdf/Sommes.pdf.

[3] Lee, J. R. (1997). The Law of Cosines in a Tetrahedron. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. B : Pure Appl. Math. 4*, 1–6 . Consulté le 4 février 2011 sur : http ://icms.kaist.ac.kr/mathnet/kms_tex/41198.pdf.

[4] *Discussion :Théorème d'Al-Kashi*, http ://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion :Théorème_d'Al-Kashi .