Note mathématique

La racine carrée par tous les moyens !

FERNAND BEAUDET,
UNIVERSITÉ LIBRE DE LA POMMERAIE,
MONT-SAINT-HILAIRE

Résumé

Les étudiants inscrits en Sciences pures au Cégep de Saint-Hyacinthe suivent le cours de mathématiques intitulé : Méthodes de preuve et algorithmes. Je donnais ce cours à l'automne 2009 . Je présente dans cette note mathématique l'essentiel des notes des deux à trois premières semaines de cours. Ce premier contact introduit les concepts de preuve et d'algorithme. Des inégalités arithmétiques fondamentales sont démontrées grâce à des arguments géométriques. Par la suite, nous utilisons ces inégalités afin de construire des algorithmes qui permettent d'obtenir une approximation de la racine carrée d'un nombre quelconque. Le lecteur voudra bien prendre en considération qu'il s'agit tout simplement de brèves notes de cours [1].

1 Inégalités fondamentales

Prenons deux nombres réels a et b positifs (donc non nuls). On définit différents types de moyennes de la manière suivante :

Moyenne arithmétique : $$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

Moyenne géométrique : $$G(a,b) = \sqrt{ab} \tag{2}$$

Moyenne harmonique : $$H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \tag{3}$$

Moyenne quadratique : $$Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{4}$$

[1] J'ai retouché le texte en août 2010, assis chez moi bien tranquillement, à moins d'un kilomètre de la Réserve de la biosphère du Mont-Saint-Hilaire (UNESCO) et en ressentant, en plein coeur de la ville, les premières vibrations des camions de prospection du gaz de schiste...

De manière plus générale, on peut définir pour des nombres réels positifs (non nuls) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les moyennes suivantes :

$$\begin{aligned}
A(a_1, ..., a_n) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}, \\
G(a_1, ..., a_n) &= \sqrt[n]{a_1 \times \cdots \times a_n}, \\
H(a_1, ..., a_n) &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}, \\
Q(a_1, ..., a_n) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}.
\end{aligned}$$

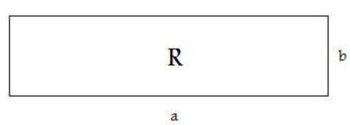
Interprétation de la moyenne harmonique H

Supposons qu'un mobile se déplace sur n distances égales à d et que pour $i = 1, \cdots, n$, la vitesse sur le parcours de la i-ème distance est v_i. Demandons-nous maintenant comment calculer la vitesse moyenne durant tout le trajet. On sait que la vitesse moyenne v_{moy} est le quotient de la distance totale parcourue D par le temps nécessaire T pour la parcourir. Cependant, comme on a n distances égales d, on peut écrire $D = nd$. De même, on peut dire que le temps total T est l'addition de tous les temps T_i, où T_i est le temps nécessaire pour parcourir la i-ème distance. Finalement, comme le temps T_i vaut $\frac{d}{v_i}$, il vient :

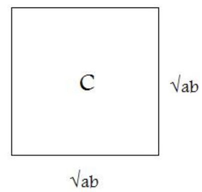
$$\begin{aligned}
v_{moy} &= \frac{D}{T} \\
&= \frac{nd}{\sum_{i=1}^{n} T_i} \\
&= \frac{nd}{\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{v_i}} \\
&= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i}} \\
&= H(v_1, ..., v_n).
\end{aligned}$$

Interprétations de la moyenne géométrique G

Prenons un rectangle R dont les côtés sont de longueurs a et b et possédant une aire ab.



Si on désire obtenir un carré possédant la même aire, on doit prendre un carré dont les côtés mesurent $\sqrt{ab}$, la moyenne géométrique de a et b.



De même, si on a un parallélépipède de volume V dont les côtés mesurent a, b et c et qu'on veut construire un cube de même volume, on doit prendre comme longueur du côté du cube la valeur $\sqrt[3]{abc}$, la moyenne géométrique de a, b et c.

Comme dernier exemple, supposons que l'on place à la banque un montant M. Soit $r_1 = 1 + I_1$ où I_1 est le taux effectif ou le rendement sur un an. Alors après un an, on peut dire que l'investissement initial vaut maintenant Mr_1. De même, on peut dire qu'après deux ans le montant vaut $(Mr_1)r_2 = Mr_1r_2$ et qu'après n années il sera de $(Mr_1 \cdots r_{n-1})r_n = Mr_1 \cdots r_{n-1}r_n$.

Posons maintenant $r = \sqrt[n]{r_1 \cdots r_n} = G(r_1, \ldots, r_n)$. Nous pouvons affirmer que r est le rendement moyen ou le taux moyen, car $Mr^n = Mr_1 \cdots r_n$.

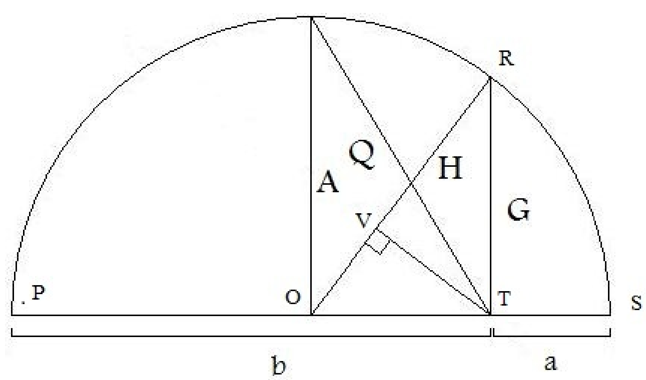
Interprétation de la moyenne quadratique Q
L'interprétation viendra lorsque nous étudierons les promenades aléatoires.

Proposition 1.1 *Supposons que* $0 < a < b$*, alors*

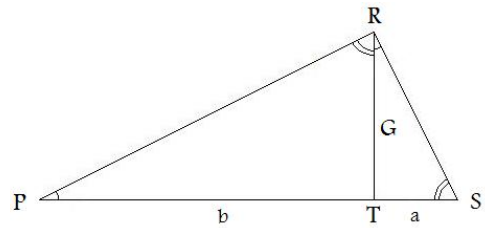
$$a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < Q(a,b) < b. \tag{5}$$

Si $a = b$*, alors tous ces nombres sont égaux.*

Démonstration Considérons un demi-cercle de rayon $\frac{a+b}{2}$, donc de diamètre $a + b$.



Par définition, la moyenne arithmétique vaut $A = \frac{a+b}{2} = rayon = A(a,b)$.
Montrons maintenant que $G = \sqrt{ab} = G(a,b) < A(a,b)$.
Prenons les deux triangles semblables ΔPRT et ΔRST.



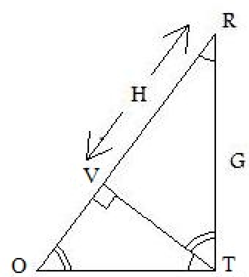
Nous savons que $\angle PRS = 90°$. De plus, il est évident que $\Delta PRT \cong \Delta RST$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{TS}}{\overline{TR}} = \frac{\overline{TR}}{\overline{PT}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a}{G} = \frac{G}{b}, \\ \text{d'où} \quad &G^2 = ab \\ \Rightarrow \quad &G = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$G(a,b) = G < A = A(a,b).$$

Montrons maintenant que $H(a,b) < G(a,b)$. Considérons le triangle suivant :



On constate rapidement que $\Delta OTR \cong \Delta RTV$, ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{RT}}{\overline{RV}} = \frac{\overline{RO}}{\overline{RT}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{G}{H} = \frac{A}{G}, \\ \text{d'où} \quad &G^2 = AH \\ \Rightarrow \quad &G = \sqrt{AH}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que H est la moyenne harmonique de a et b, c'est-à-dire que $H = H(a,b)$.

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{a+b}{\frac{a+b}{ab}} = ab,$$

donc

$$A(a,b) \times H(a,b) = [G(a,b)]^2.$$

D'un autre côté, nous venons de montrer que $A \times H = G^2$.
Mais $A = A(a,b)$ et $G = G(a,b) \Rightarrow H = H(a,b)$. Ainsi on obtient :

$$H(a,b) < G(a,b).$$

À ce stade-ci, nous avons montré les inégalités :

$$H(a,b) < G(a,b) < A(a,b).$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $A(a,b) < Q(a,b)$. Pour ce faire, montrons tout d'abord que $Q = Q(a,b)$.
On remarque que :

$$\overline{PR} = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}.$$

En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\begin{aligned}
Q^2 &= A^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2+b^2}{2}, \\
\text{d'où } Q &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = Q(a,b).
\end{aligned}$$

Nous avons donc les inégalités

$$H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < Q(a,b).$$

Notons finalement que $a < b \Rightarrow a + b < b + b$, ainsi :

$$H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} > \frac{2ab}{b+b} = a.$$

On a donc que $a < H(a,b)$, puis

$$Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \sqrt{\frac{b^2+b^2}{2}} = \sqrt{b^2} = b.$$

En conclusion :

$$a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < Q(a,b) < b.$$

□

Remarque : Si $a = b$, on obtient alors $a = H = G = A = Q = b$.

Proposition 1.2 *Supposons que* $0 < a < b$, *alors*

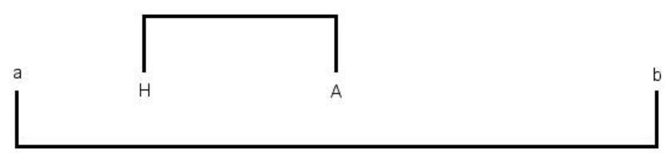
$$A(a,b) - H(a,b) < \frac{b-a}{2}. \tag{6}$$

Démonstration Calculons !

$$\begin{aligned} A(a,b) - H(a,b) &= \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \\ &= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a+b)} \\ &= \frac{(b-a)(b-a)}{2(a+b)} \\ &< \frac{b-a}{2} \quad \text{car} \quad \frac{b-a}{a+b} < 1. \end{aligned}$$

□

Interprétation :



Proposition 1.3

$$G\left(H(a,b), A(a,b)\right) = G(a,b). \tag{7}$$

Démonstration Calculons.

$$\begin{aligned} G\left(H(a,b), A(a,b)\right) &= [H(a,b) \times A(a,b)]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{2ab}{a+b} \times \frac{a+b}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= [ab]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab} \\ &= G(a,b). \end{aligned}$$

□

Exemple 1.1 *Prenons $a = 1$ et $b = 9$.*

$$\begin{aligned} H(1,\ 9) &= \frac{2 \cdot 1 \cdot 9}{1+9} = \frac{18}{10} = 1,8 \\ A(1,\ 9) &= \frac{1+9}{2} = 5 \\ G(1,\ 9) &= \sqrt{1 \cdot 9} = 3 \quad (= \sqrt{5 \cdot 1,8}) \end{aligned}$$

$$H(1,8\;,5) = \frac{2\cdot 1,8\cdot 5}{1,8+5} = \frac{18}{6,8} = 2,647$$

$$A(1,8\;,5) = \frac{1,8+5}{2} = \frac{6,8}{2} = 3,4$$

En résumé :

$1,8$	$2,647$		$3,4$	5
a	H	$\bullet$	A	b
		$G = 3$		

2 Racine carrée : première méthode

Soit $b > 1$ un nombre réel quelconque. Nous présentons une procédure afin de déterminer une approximation de la racine carrée de b. Nous procédons par approximations successives, chaque étape étant basée sur l'étape précédente. Nous continuons le processus jusqu'à ce nous atteignions la précision désirée.

Soit $b > 1$ un nombre réel. Posons $a_0 = 1$ et $b_0 = b$. Nous avons $a_0 < b_0$. Définissons l'intervalle $I_0 = [a_0, b_0] = [1, b]$. Cela constitue l'étape 0 de notre processus.

Puis définissons l'étape 1 ou l'itération 1 comme suit. Posons $a_1 = H(a_0, b_0)$, $b_1 = A(a_0, b_0)$ et $I_1 = [a_1, b_1]$. En vertu des inégalités démontrées dans la section précédente, nous avons

$$a_0 < a_1 < b_1 < b_0 \tag{8}$$

puisque

$$a_0 < H(a_0, b_0) < A(a_0, b_0) < b_0. \tag{9}$$

Remarquons que $G(a_0, b_0) = G(1, b) = \sqrt{b}$, la valeur recherchée, et que

$$a_0 < H(a_0, b_0) < \sqrt{b} < A(a_0, b_0) < b_0. \tag{10}$$

Notons $\lambda(I)$ la longueur d'un intervalle quelconque I. La proposition 1.2 nous dit que la longueur de l'intervalle I_1 est plus petite que la moitié de la longueur de l'intervalle I_0.

$$\lambda(I_1) = b_1 - a_1 < \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{\lambda(I_0)}{2}. \tag{11}$$

De plus, $\sqrt{b} \in I_1 \subset I_0$.
Passons à l'itération 2. Posons $a_2 = H(a_1, b_1)$, $b_2 = A(a_1, b_1)$ et $I_2 = [a_2, b_2]$. Nous obtenons

$$a_0 < a_1 < H(a_1, b_1) < A(a_1, b_1) < b_1 < b_0, \tag{12}$$

ou encore

$$a_0 < a_1 < a_2 < b_2 < b_1 < b_0. \tag{13}$$

Il est important de noter les deux points suivants. D'abord nous avons

$$a_2 < G(a_1, b_1) < b_2 \tag{14}$$

et de plus, en vertu de la proposition 1.3,

$$G(a_1, b_1) = G(H(a_0, b_0), A(a_0, b_0)) = G(a_0, b_0) = \sqrt{b}, \tag{15}$$

c'est-à-dire : $a_2 < \sqrt{b} < b_2$. Nous avons donc construit un intervalle $I_2 \subset I_1$ contenant la racine carrée de b :

$$\sqrt{b} \in I_2 \subset I_1 \subset I_0. \tag{16}$$

Ensuite, la longueur $\lambda(I_2)$ est au plus la moitié de celle de l'intervalle I_1 :

$$\lambda(I_2) = b_2 - a_2 < \frac{b_1 - a_1}{2} < \frac{b_0 - a_0}{2^2} = \frac{\lambda(I_0)}{2^2}. \tag{17}$$

L'itération 3 est obtenue en posant $a_3 = H(a_2, b_2)$, $b_3 = A(a_2, b_2)$ et $I_3 = [a_3, b_3]$. On vérifie facilement les inégalités

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \sqrt{b} < b_3 < b_2 < b_1 < b_0,$$

les inclusions

$$\sqrt{b} \in I_3 \subset I_2 \subset I_1 \subset I_0$$

et la relation

$$\lambda(I_3) < \frac{\lambda(I_0)}{2^3}.$$

De manière générale, supposons que nous ayons construit $I_n = [a_n, b_n]$, vérifiant les relations

$$a_n < \sqrt{b} < b_n, \tag{18}$$

$$\sqrt{b} \in I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_0, \tag{19}$$

$$\lambda(I_n) < \lambda(I_0)/2^n. \tag{20}$$

On peut définir par la suite l'intervalle $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ en posant $a_{n+1} = H(a_n, b_n)$ et $b_{n+1} = A(a_n, b_n)$. Nous obtenons les inégalités

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < \cdots < b_1 < b_0 \tag{21}$$

et les inclusions

$$I_{n+1} \subset I_n \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0. \tag{22}$$

La proposition 1.3 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
G(a_{n+1}, b_{n+1}) &= G(H(a_n, b_n), A(a_n, b_n)) \\
&= G(a_n, b_n) \\
&= G(a_{n-1}, b_{n-1}) \\
&= \cdots \\
&= G(a_1, b_1) \\
&= G(a_0, b_0) \\
&= \sqrt{b}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$a_n < a_{n+1} < \sqrt{b} < b_{n+1} < b_n$$

et

$$\sqrt{b} \in I_{n+1} \subset I_n.$$

De plus, la proposition 1.2 nous donne les inégalités

$$\begin{aligned}
\lambda(I_{n+1}) &< \lambda(I_n)/2 \\
&< \lambda(I_0)/2^{n+1}.
\end{aligned}$$

En continuant de la sorte, nous pouvons construire une suite d'intervalles (fermés) emboîtés I_n contenant tous $\sqrt{b}$. La longueur $\lambda(I_n)$ de ces intervalles tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Nous constatons que la suite décroissante b_n tend vers $\sqrt{b}$: $b_n \searrow \sqrt{b}$. De même, la suite croissante a_n tend vers $\sqrt{b}$: $a_n \nearrow \sqrt{b}$. Puisque $\lambda(I_n) \to 0$, on peut obtenir une valeur b_n (ou a_n) aussi proche qu'on le souhaite de $\sqrt{b}$ en prenant n suffisamment grand. Vous aurez à explorer cette méthode dans les laboratoires présentés en classe.

Itération	a_i	b_i	Intervalle I_i
Itération 0	$a_0 = 1$	$b_0 = b$	$I_0 = [1, b]$
Itération 1	$a_1 = H(a_0, b_0)$	$b_1 = A(a_0, b_0)$	$I_1 = [a_1, b_1]$
Itération 2	$a_2 = H(a_1, b_1)$	$b_2 = A(a_1, b_1)$	$I_2 = [a_2, b_2]$
Itération 3	$a_3 = H(a_2, b_2)$	$b_3 = A(a_2, b_2)$	$I_3 = [a_3, b_3]$
...	...	...	...
Itération $n+1$	$a_{n+1} = H(a_n, b_n)$	$b_{n+1} = A(a_n, b_n)$	$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$

3 Racine carrée : deuxième méthode (Héron)

La méthode que nous présentons ici est attribuée au mathématicien grec Héron d'Alexandrie (c. 10 - 70 AD), mais elle est probablement plus ancienne. La motivation géométrique repose sur le principe suivant. Pour les mathématiciens grecs, trouver la racine carrée d'un nombre b signifiait construire un carré dont l'aire est b. Supposons que $b > 1$. Prenons un rectangle R_0 d'aire égale à b, dont la base est de longueur $x_0 > \sqrt{b}$. (Le choix de x_0 comme point de départ est arbitraire mais n'influence pas la rapidité de la convergence du processus.) La hauteur de ce rectangle est $h_0 = b/x_0$. L'idée est de construire un nouveau rectangle R_1 ayant la même aire b et dont la nouvelle base serait la moyenne arithmétique de la hauteur et de la base de R_0. La base de R_1 sera donc $x_1 = \frac{1}{2}(x_0+h_0)$ et la hauteur $h_1 = b/x_1$. Ce nouveau rectangle est « plus carré » que le précédent... En continuant de la sorte, on arrive à construire une suite de rectangles R_n dont l'aire est toujours b et qui « ressemblent » de plus en plus à un carré.

Nous décrivons la procédure itérative en détail puis nous démontrons que la base x_n de R_n converge (rapidement) vers la racine carrée de b.

Itération 0 :
R_0 est un rectangle de base x_0 et de hauteur $h_0 = b/x_0$.

Itération 1 :
R_1 est un rectangle de base $x_1 = A(x_0, h_0)$ et de hauteur $h_1 = b/x_1$. Ainsi

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + h_0) = \frac{1}{2}\Big(x_0 + \frac{b}{x_0}\Big)$$

et

$$h_1 = b/x_1.$$

Itération 2 :
R_2 est un rectangle de base $x_2 = A(x_1, h_1)$ et de hauteur $h_2 = b/x_2$. Ainsi

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + h_1) = \frac{1}{2}\Big(x_1 + \frac{b}{x_1}\Big)$$

et

$$h_2 = b/x_2.$$

...

Itération $n+1$:
Soit R_n le rectangle de base x_n et de hauteur $h_n = b/x_n$. Alors R_{n+1} a les dimensions

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + h_n) = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{b}{x_n}\Big)$$

et

$$h_{n+1} = b/x_{n+1}.$$

Exemple 3.1 *Illustrons ce processus à l'aide d'un exemple concret.*

Soit $b = 20$. Prenons $x_0 = 10 > \sqrt{20}$. Alors nous obtenons les premières itérations suivantes. (Seules les premières décimales sont inscrites dans ce tableau.)

Itération	x_i	h_i
Itération 0	$x_0 = 10$	$h_0 = 20/10 = 2$
Itération 1	$x_1 = (10 + 2)/2 = 6$	$h_1 = 20/6 = 10/3$
Itération 2	$x_2 = (6 + 10/3)/2 = 4,666667$	$h_2 = 20/4,47222 = 4,28571$
Itération 3	$x_3 = (4,666667 + 4,28571)/2 = 4,4761904$	$h_3 = 4,468085$
Itération 4	$x_4 = 4,4721377$	$h_4 = 4,4721341$
...	...	...

La figure 1 présente l'itération 0. On retrouve le graphe de l'hyperbole $xy = 20$, la droite $x = y$ et le premier rectangle R_0. L'intersection de la droite et de l'hyperbole a lieu au point $(\sqrt{20}, \sqrt{20})$.

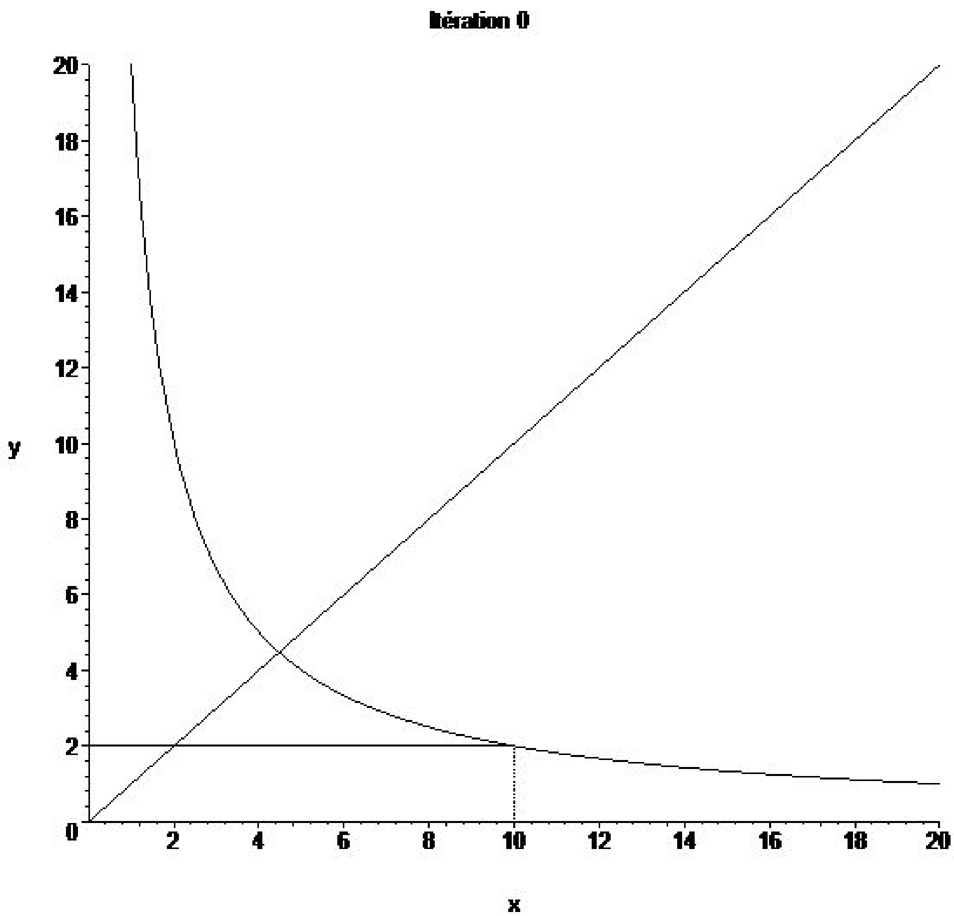


FIG. 1 – Itération 0

Les figures 2 et 3 présentent les itérations 1 et 2 respectivement. Les rectangles R_1 et R_2 sont tracés. On constate qu'à mesure que n augmente, les rectangles sont « de plus en plus carrés ».

Nous constatons que le processus converge rapidement vers la racine carrée de 20 : $\sqrt{20} = 4,472135954...$.

Les propositions suivantes permettent d'établir que la suite x_n converge vers la racine carrée de b.

Proposition 3.1 *Supposons que $1 < b$, si $x_n > \sqrt{b}$. Alors*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n}\right) > \sqrt{b}. \tag{23}$$

En particulier, si $x_0 > \sqrt{b}$, alors tous les x_n sont plus grands que $\sqrt{b}$.

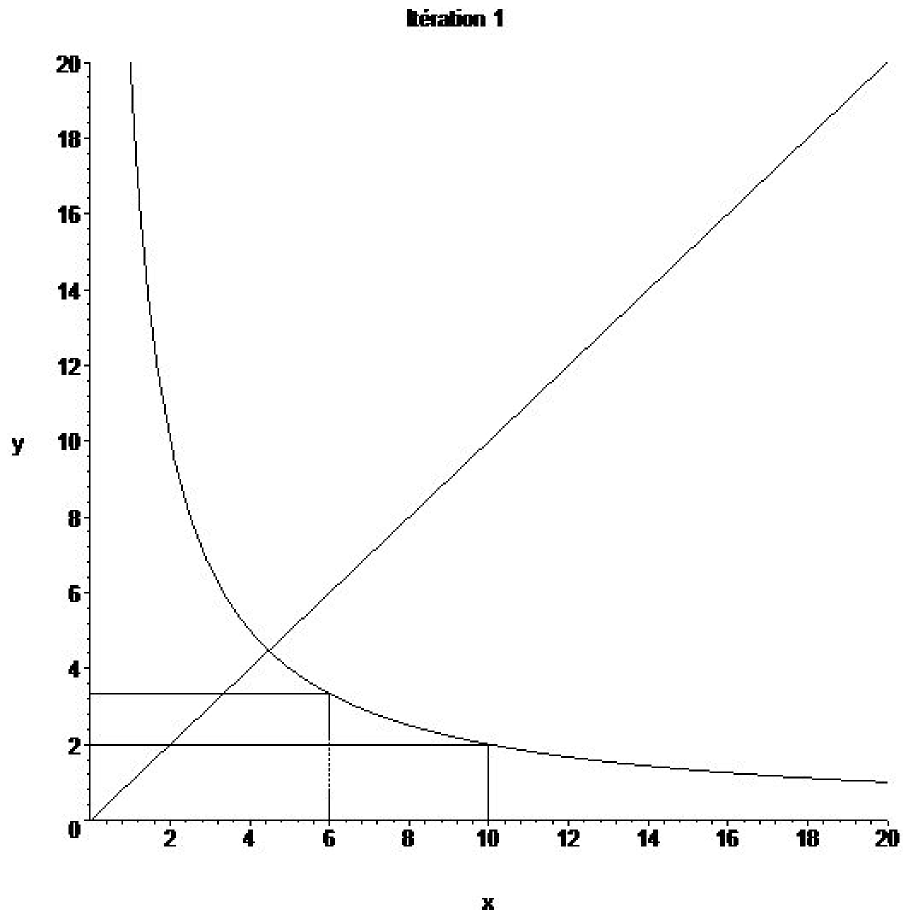


FIG. 2 – Itération 1

Démonstration Montrons que $x_{n+1} - \sqrt{b} > 0$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{b} &= \frac{x_n}{2} + \frac{b}{2x_n} - \sqrt{b} \\ &= \frac{1}{2x_n}\Big(x_n^2 - 2x_n\sqrt{b} + b\Big) \\ &= \frac{1}{2x_n}\big(x_n - \sqrt{b}\,\big)^2 > 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2 *Soit* $x_0 > \sqrt{b}$. *La suite* x_n *est décroissante.*

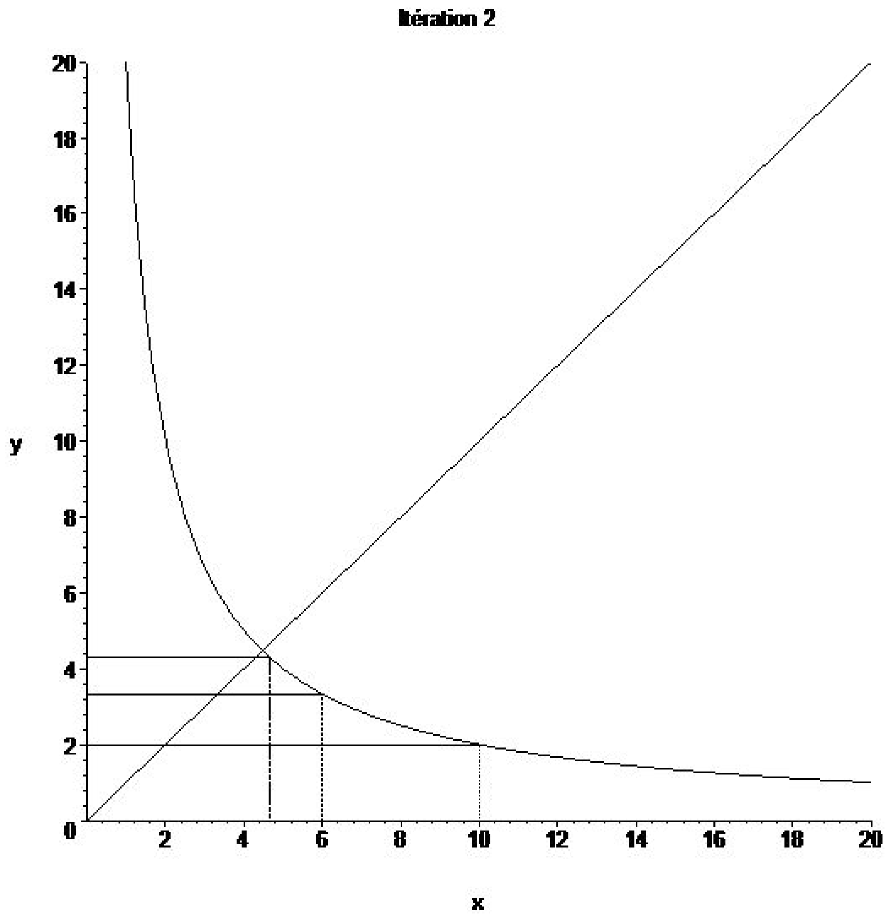


FIG. 3 – Itération 2

Démonstration Montrons que $x_{n+1} - x_n < 0$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n}{2} + \frac{b}{2x_n} - x_n \\ &= \frac{b}{2x_n} - \frac{x_n}{2} \\ &= \frac{1}{2x_n}\big(b - x_n^2\big) < 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3 *Soit $x_0 > \sqrt{b}$. Nous avons :*

$$x_{n+1} - \sqrt{b} < \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{b}\,\big). \tag{24}$$

Démonstration La preuve de la proposition 3.1 nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{b} &= \frac{1}{2x_n}\big(x_n - \sqrt{b}\,\big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{b}\,\big) \times \frac{1}{x_n}\big(x_n - \sqrt{b}\,\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{b}\,\big)\Big(\frac{x_n}{x_n} - \frac{\sqrt{b}}{x_n}\,\Big) \\
&= \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{b}\,\big)\Big(1 - \frac{\sqrt{b}}{x_n}\,\Big) \\
&< \frac{1}{2}\big(x_n - \sqrt{b}\,\big).
\end{aligned}$$

L'inégalité stricte vient du fait que $x_n > \sqrt{b}$, et donc que $(1 - \frac{\sqrt{b}}{x_n}\,) < 1$. □

L'écart entre le terme x_{n+1} et $\sqrt{b}$ est plus petit que la moitié de l'écart entre x_n et $\sqrt{b}$. On peut donc conclure que la suite x_n converge vers la limite $\sqrt{b}$. Notons qu'on peut démontrer que le nombre de décimales exactes double à chaque itération. Vous aurez à explorer cette méthode dans les laboratoires présentés en classe.

4 Racine carrée : troisième méthode (Newton)

Soit $b > 0$. Soit $f(x) = x^2 - b$. Un zéro de la fonction $f(x)$ est un nombre a tel que $f(a) = 0$. Dans ce contexte, cela signifie que $a^2 = b$, ou encore $a = \sqrt{b}$. Afin de trouver la racine carrée de b, il suffit de trouver un zéro de la fonction $f(x)$. La méthode de Newton permet de trouver un zéro d'une fonction quelconque par approximations successives en utilisant la droite tangente. Comme dans l'exemple de la section précédente, posons $x_0 = 10$. Traçons la droite tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. (Voir la figure 4.)

L'intersection de la droite tangente avec l'axe des x nous donne le point x_1. Nous continuons le processus itératif en traçant la droite tangente au graphe de f au point $(x_1, f(x_1))$. (Voir la figure 5.) L'intersection de cette droite tangente avec l'axe des x donne un nouveau point x_2 qui s'approche du zéro de $f(x)$.

Maintenant passons aux calculs explicites !

L'équation de la droite tangente en x_0 est :

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

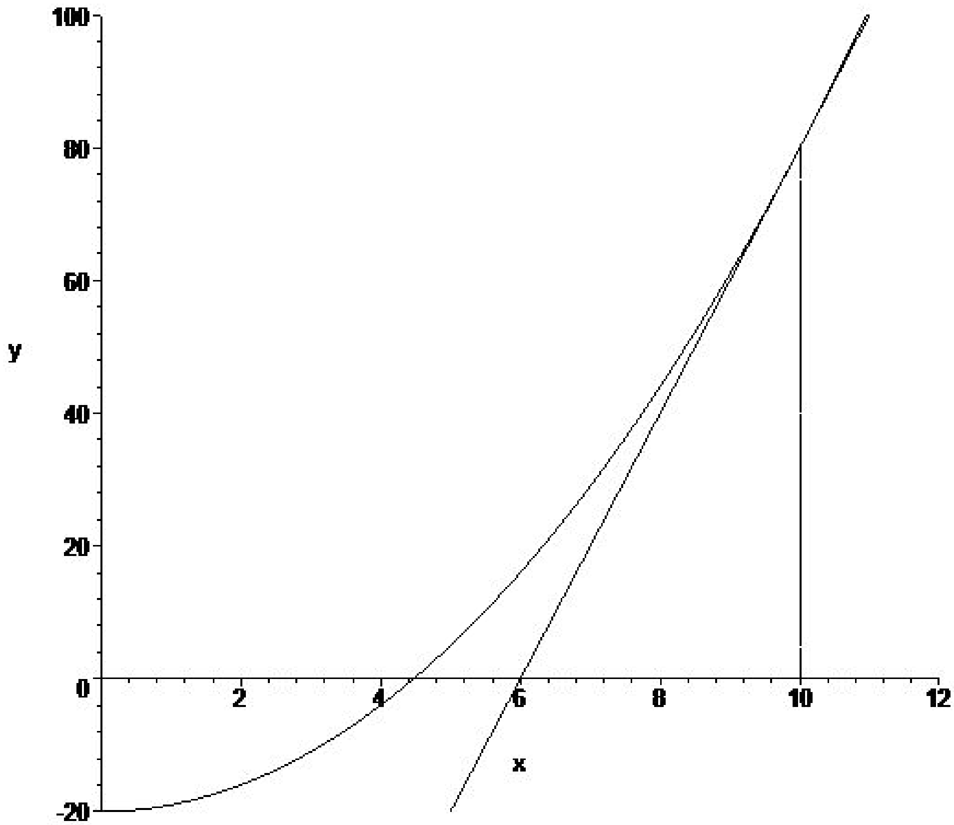


FIG. 4 – Itération 1

La droite tangente touche l'axe des x lorsque $T(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ -f'(x_0)(x - x_0) &= f(x_0) \\ (x - x_0) &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Posons

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{25}$$

Ceci constitue notre première itération. Supposons maintenant x_n connu. L'équation de la droite tangente au graphe de $f(x)$ au point $(x_n, f(x_n))$ est donnée par

$$T(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

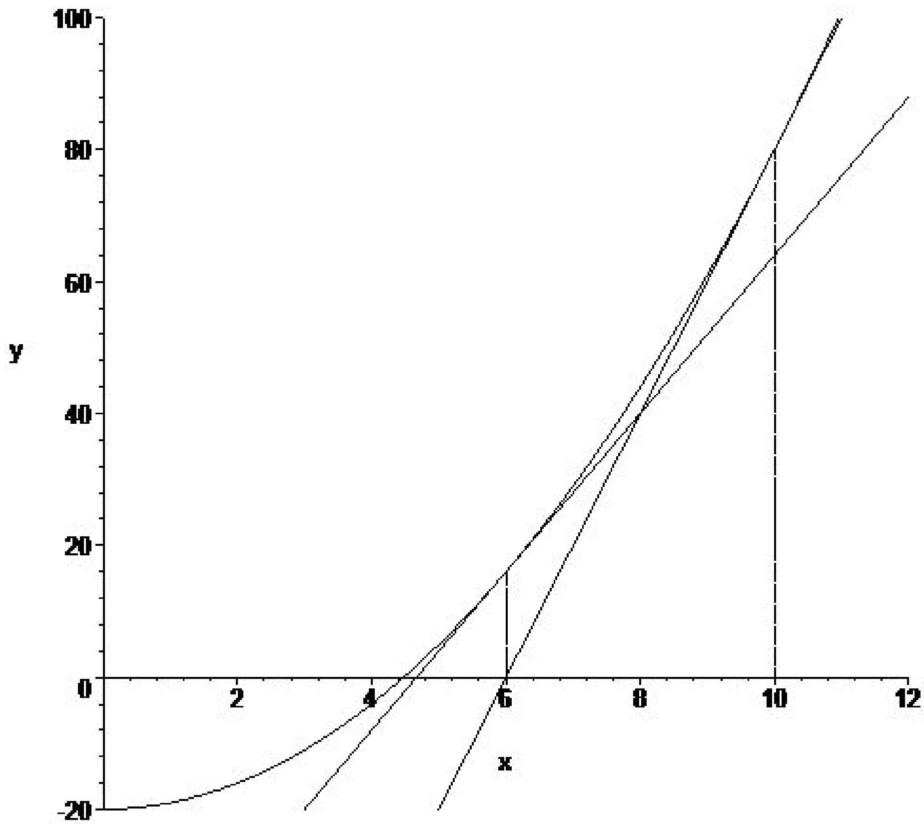


FIG. 5 – Itération 2

On obtient le point de contact x_{n+1} avec l'axe des x comme précédemment :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{26}$$

Dans le contexte de la fonction $f(x) = x^2 - b$, nous avons

$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_n^2 - b \\ f'(x_n) &= 2x_n. \end{aligned}$$

L'équation (26) devient alors

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^2 - b}{2x_n} \\ &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{b}{2x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{b}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{b}{x_n}\Big). \end{aligned}$$

Le processus itératif est identique à celui de la méthode de Héron, un fait absolument remarquable quand on pense que plus de 16 siècles les séparent et qu'ils font appel à des notions totalement différentes !

La méthode de Newton se généralise aux racines n-ièmes comme suit. Soit $f(x) = x^n - b$. Un zéro a de $f(x)$ est tout simplement une racine n-ième de b. Dans ce contexte, nous avons

$$\begin{aligned} f(x_i) &= x_i^n - b \\ f'(x_i) &= nx_i^{n-1}. \end{aligned}$$

L'équation (26) permet d'écrire les relations :

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \frac{x_i^n - b}{nx_i^{n-1}} \\ &= x_i - \frac{x_i}{n} + \frac{b}{nx_i^{n-1}} \\ &= n\frac{x_i}{n} - \frac{x_i}{n} + \frac{b}{nx_i^{n-1}} \\ &= (n-1)\frac{x_i}{n} + \frac{b}{nx_i^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n}\Big((n-1)x_i + \frac{b}{x_i^{n-1}}\Big). \end{aligned}$$

Le processus itératif est donc donné par :

$$x_{i+1} = \frac{1}{n}\Big((n-1)x_i + \frac{b}{x_i^{n-1}}\Big). \tag{27}$$

On appelle ce processus le méthode de Héron généralisée. Lorsque $n = 2$ on retrouve les étapes de la méthode de Newton. Vous aurez à explorer les méthodes de cette section lors des travaux et laboratoires.

Il est important de noter que la méthode de Newton ne fonctionne pas toujours. La convergence ou non de la suite x_n peut dépendre de la dérivée deuxième de $f(x)$. Vous aurez à étudier ce phénomène dans le premier devoir.