Énigmes et jeux mathématiques

Frédéric Gourdeau,
Département de mathématiques et de statistique,
Université Laval

Pour ce bulletin, je vous présente trois problèmes : le troisième est un peu plus technique, mais la solution est jolie.

Un grand malade. Un homme prend 48 pilules en 30 jours, en prenant au moins une pilule chaque jour. Montrer qu'on peut toujours trouver une suite de jours consécutifs pendant lesquels il prend en tout exactement 10 pilules. Peut-on trouver une suite de jours pendant lesquels il prend exactement 12 pilules ?

Des nombres premiers avec des 0 et des 1. Considérer la suite

$$1, 10, 101, 1010, 10101, \ldots$$

Quels sont les nombres premiers qui appartiennent à cette suite ?

Dérivée centenaire. Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Trouver une manière simple de calculer $f^{(100)}(x)$, i.e. la dérivée centième de $f(x)$.

Solutions des problèmes du dernier numéro

1- Mes cousines. Mes trois cousines, Louise, Suzanne et Sylvie, ne veulent pas me révéler leur âge mais elles m'ont chacune donné un indice. Je sais que dans trois ans, la somme de leurs âges sera 60. Je sais aussi qu'il y a trois ans, la somme des âges de Sylvie et de Louise donnait l'âge de Suzanne. Finalement, je sais que lorsque Louise aura l'âge que Suzanne a maintenant, Sylvie aura l'âge que Louise a aujourd'hui ! Pouvez-vous me donner l'âge de chacune de mes cousines ?

Solution. Le dernier indice semble le plus intriguant : sans utiliser d'algèbre, on peut tout de même comprendre que la différence entre l'âge de Suzanne et celui de Louise est égale à la différence entre l'âge de Louise et celui de Sylvie.

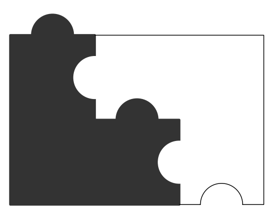
Reprenons maintenant les deux premiers indices. Comme dans trois ans, la somme de leurs âges sera 60, on sait que cette somme est maintenant de 51. Il y a trois ans, cette somme était donc de 42, qui était le double de l'âge de Suzanne : Suzanne avait donc 21 ans il y a trois ans. En relisant le dernier indice, on voit que Louise avait 14 ans et Sylvie, 7 ans. Elles sont donc maintenant âgées de 24, 17 et 10 ans respectivement.

2- Le casse-tête d'Éric. Éric essaie de fabriquer un casse-tête. Il veut avoir cinq pièces rectangulaires différentes et pouvoir les disposer de manière à former un carré (sans que les rectangles ne se superposent et sans qu'il n'y ait de trou). Il veut aussi que les longueurs des côtés de ces rectangles soient toutes différentes et, en fait, mesurent 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 centimètres. Comme il y a bien cinq rectangles et dix longueurs, il se dit que cela doit être possible. Pouvez-vous lui donner les dimensions de rectangles qui font l'affaire ?

SOLUTION. Il y a plusieurs solutions. On peut faire un tel casse-tête avec des rectangles de dimensions 1 par 6, 2 par 10, 3 par 9, 4 par 7 et 5 par 8, pour obtenir un carré 11 par 11. On peut aussi utiliser des rectangles de dimensions 1 par 2, 3 par 8, 4 par 5, 6 par 10 et 7 par 9, pour obtenir un carré 13 sur 13. Il y a d'autres bonnes solutions.

3- À vos ciseaux ! Sauriez-vous découper cette figure en deux morceaux identiques ? (Deux morceaux sont identiques si on peut les superposer parfaitement, quitte à en retourner un pour ce faire.)

SOLUTION. Et voici la solution !



4- Une addition oubliée. Aline avait trouvé deux nombres dont la somme est amusante. En effet, lorsque l'on écrit ces deux nombres de trois chiffres et leur somme (qui a quatre chiffres), on écrit les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 une fois chacun exactement ! Malheureusement, Aline a oublié ces nombres : elle se souvient que le premier commence par 28 et que le second se termine par 4, mais c'est tout. Pouvez-vous retrouver ces nombres pour elle ?

SOLUTION. On cherche les chiffres qui correspondent aux lettres A à G dans $28A + BC4 = DEFG$. On trouve tout d'abord que $D = 1$ (on ne peut avoir plus), puis que B doit être 7 ou 9 : on rejette 9 car cela forcerait $E = 1$ ou $E = 2$ qui ne sont pas permis. Ayant $B = 7$, on a alors $E = 0$.

On peut alors considérer les valeurs de A et G : les deux couples de valeurs possibles sont $A = 5$ et $G = 9$, ainsi que $A = 9$ et $G = 3$. On voit facilement que seule la deuxième possibilité fonctionne, pour obtenir finalement $289 + 764 = 1053$.